Sujet 03. Probabilités

1. Le sujet

A. Exercice

Une expérience consiste à lancer deux fois un dé tétraédrique supposé équilibré.
À partir du couple $(a\ ;\ b)$ obtenu, formé d'entiers entre 1 et 4, on écrit l'équation (E) d'inconnue réelle x :
$a\,x^2 + b\,x + 1 = 0$.

Dans cette expérience, combien peut-on espérer de solutions en moyenne ?

B. Les réponses de deux élèves de première

Elève 1

Les couples d'entiers (a, b) possibles sont : (1, 1) ou (1, 2) ou (1, 3) ou (1, 4) ou (2, 2) ou (2, 3) ou (2, 4) ou (3, 3) ou (3, 4) ou (4, 4).

L'équation $a\,x^2 + b\,x + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = b^2 - 4a$.
Parmi les couples possibles, Δ est strictement négatif 3 fois sur 10, Δ est nul 2 fois sur 10 et Δ est strictement positif 5 fois sur 10.

Le nombre moyen de solutions est donc égal à 1,2.

Elève 2

J'ai utilisé un tableur pour faire 100 lancers avec la fonction Aleaentrebornes$(1\ ;\ 4)$

$\dfrac{1\times 13 + 2\times 29}{100} = 0{,}71$.

En moyenne, l'équation admet 0,71 solution.

	A	B	C	D	E	F	G
1	*dé 1*	*dé 2*	*delta*				
2	4	1	−15				
3	4	2	−12		*0 solution*	*1 solution*	*2 solutions*
4	4	2	−12		58	13	29
5	2	1	−7				
6	4	4	0				
7	3	3	−3				
8	2	3	1				

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analyser les démarches de chaque élève, en mettant en évidence leurs réussites leurs erreurs éventuelles, ainsi que l'accompagnement que vous pourriez leur proposer pour les aider à progresser.

2. Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première.

3. Proposez deux exercices sur le thème *probabilités* à des niveaux de classe différents. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences qu'ils permettent de développer chez les élèves.

2. Eléments de correction

Voici un exercice portant sur le calcul d'une espérance. Ce calcul est un prétexte pour amener les élèves à construire une démarche permettant de résoudre un problème complexe, dans une situation certes quelque peu artificielle, mais construite pour croiser des savoirs et savoir faire issus de domaines différents. Il s'agira en effet de décrire mathématiquement l'expérience proposée (domaine des probabilités, construire un espace probabilisé ; le choix d'un dé tétraédrique et non du classique dé cubique limite le nombre d'éventualités) mais en même temps de trouver un moyen pour caractériser le nombre de solutions de l'équation associée au résultat de l'expérience. Pour cela, les techniques usuelles du second degré (domaine algébrique) seront utilisées dans un contexte inattendu.
Ce problème aurait pu tout aussi bien être classé dans le thème « problème avec prise d'initiative ».

Juste un détail : j'aurais rédigé : « quelle est l'espérance du nombre de solutions » plutôt que « combien peut-on espérer de solutions » même si on ajoute « en moyenne ». Une espérance est un nombre réel alors que « combien de solutions » induit un entier. Point de vue strictement personnel …

1. Analyse de travaux d'élèves.
Elève 1.
Cet élève s'engage dans la démarche certainement attendue par l'enseignant :

- Il construit un espace probabilisé.
- Il envisage implicitement une variable aléatoire, la variable Δ, qui, comme son nom l'indique pleinement, lui sert à « discriminer » le nombre de solutions.
- Il distingue trois évènements : « $\Delta < 0$ », « $\Delta = 0$ », « $\Delta > 0$ », qui l'amènent, implicitement toujours, à la variable aléatoire « nombre de solutions », dont il calcule l'espérance de façon cohérente avec sa construction.

L'élaboration de cette démarche est en soi une réussite.

Cet élève commet deux erreurs :

- D'une part, l'espace probabilisé qu'il a choisi ne permet pas de décrire correctement la situation car il ne distingue pas l'un de l'autre les résultats des deux lancers. Il est constitué des paires $\{a, b\}$ et non des couples (a, b). (Les résultats qu'il obtient montrent que, selon lui, a est toujours le plus petit des deux entiers)
- D'autre part, la distribution de probabilité sur cet espace est incorrecte. Sur l'espace choisi par cet élève, il n'y a pas équiprobabilité car les paires d'entiers distincts devraient avoir une probabilité plus grande que les paires formées de deux entiers égaux.

Pour faire prendre conscience à cet élève de son erreur, on peut lui demander comment distinguer parmi les éventualités de son espace probabilisé dans quel cas on obtient l'équation $2x^2 + 3x + 1 = 0$ et dans quel cas l'équation $3x^2 + 2x + 1 = 0$?
Il s'agit de l'amener à distinguer d'une façon ou d'une autre le lancer a du lancer b et à revenir sur le choix de son espace probabilisé.
On peut aussi le confronter aux résultats d'une simulation qui contrediront ses conclusions.

Bougnègue.
Bougnègue « élabore une simulation numérique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel ».
Au vu de ses résultats, on peut conjecturer que sa simulation est correcte (réussite).

Il s'agit là de l'unique réussite. Bougnègue en reste au stade expérimental. Sa production ne témoigne d'aucune trace d'analyse mathématique de la situation.
Son erreur est de considérer qu'une simulation donne le résultat exact, confondant une conjecture « il semble que le nombre moyen est voisin de 0,71 » et une preuve (« le nombre moyen est exactement 0,71 »)
Il n'y a aucun moyen de « l'aider à progresser » dans la voie qu'il a choisie. On peut seulement lui proposer de recalculer sa feuille, de façon à obtenir des distributions de fréquences (et en conséquence de calculs de

moyenne) différentes. Et le mettre devant la nécessité de déterminer par le calcul la valeur exacte de l'espérance (l'amener à changer sa stratégie, vers un traitement mathématique pertinent).

2. Une correction de l'exercice.

Pour des raisons différentes, les travaux d'élèves sont tous deux intéressants pour bâtir une correction de l'exercice.

On commence par mettre en évidence les étapes de la démarche de l'élève 1 :

- Proposer un espace probabilisé permettant de décrire la situation.
- Définir sur cet espace une variable aléatoire déterminant le nombre de solutions et s'intéresser à sa distribution de probabilité.
- Calculer l'espérance du nombre de solutions.

La simulation de Bougnègue est en réserve pour valider ou invalider le choix de l'espace probabilisé. En particulier, selon la construction de l'élève 1, la probabilité d'obtenir deux solutions est égale à 0,5. La fréquence de « 2 solutions » dans la simulation des 100 lancers de l'élève 2 devrait être dans l'intervalle de fluctuation $[0{,}4\ ,\ 0{,}6]$. Or, la fréquence observée est 0,29, largement à l'extérieur. Il y a « quelque chose qui ne marche pas ». Il faut donc revenir sur le choix de l'espace probabilisé.
On fait remarquer que les rôles de *a* et de *b* ne sont pas symétriques. Il faut nécessairement distinguer l'un de l'autre (le dé est «lancé deux fois » dit l'énoncé …).

Comment représenter facilement le lancer de deux dés et distinguer les éventualités qui se présentent ?

- On peut construire un arbre de probabilité à 16 branches
- On peut construire un tableau à double entrée à 16 cellules.

Peu importe le type de représentation, elle conduit au choix de l'espace probabilisé : $\Omega = \{(a,\, b)\ ;\ _{gilbertjulia2018}\ a \in \{1,2,3,4\},\ b \in \{1,2,3,4\}\}$ formé de 16 éléments et muni de l'équiprobabilité.

Il reste à définir sur cet espace une variable aléatoire :

- Ou bien la variable aléatoire $_{gjulia2018}\ \Delta = b^2 - 4a$ qui permet de discriminer le nombre de solutions de l'équation.
- Ou bien la variable aléatoire X associant directement à chaque éventualité le nombre de solutions

a → ***b*** ↓	**1**	**2**	**3**	**4**
1	-3	-7	-11	-15
2	0	- 4	-8	-12
3	5	1	-3	-7
4	12	8	4	0

a → ***b*** ↓	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0	0	0	0
2	1	0	0	0
3	2	2	0	0
4	2	2	2	1

Il s'agit d'arriver à la distribution de probabilité suivante :

X	0	1	2
p	$\frac{9}{16}$ $_{gjulia2018}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$

L'espérance du nombre de solutions est, en conséquence, égale à $\frac{3}{4}$. La simulation de Bougnègue nous indique que ces résultats sont *plausibles*.

3. Commentaire

Quand et pourquoi un tableur ?

L'occasion m'est donnée ici de proposer quelques réflexions personnelles concernant l'utilisation d'un tableur dans le cadre d'une expérience aléatoire. Deux cas me paraissent se distinguer.

Premier cas : « Je voudrais être rassuré sur mon résultat »

J'ai calculé la probabilité p d'un évènement A, mais je ne suis pas sûr de ma modélisation, j'ai un doute sur sa validité et sur la valeur de p. Dans ce cas, je vais simuler une série d'un nombre déterminé n d'expériences et je vais voir si la fréquence observée de A est ou non dans un intervalle de fluctuation comme $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$. Si non, je vais suspecter un problème soit dans ma simulation soit dans ma modélisation. Si oui, mon résultat est plausible, mon modèle n'est pas invalidé (je ne suis pas certain pour autant qu'il soit valide, je suis rassuré « à moitié » …).

Le tableur ne prouve pas une exactitude. Dans certaines circonstances, il peut prouver (avec un seuil de risque) qu'il y a inexactitude.

L'enseignant peut en particulier utiliser ce moyen lorsque deux modélisations différentes d'une même expérience s'opposent (« On va voir qui a tort… » et non « On va voir qui a raison … »).

Deuxième cas : « Je n'ai aucune idée sur ce qu'il faut trouver »

Je ne sais pas calculer la probabilité p d'un évènement A, mais je voudrais avoir un ordre de grandeur de cette probabilité. Dans ce cas, je vais simuler une série d'un nombre déterminé n d'expériences et je vais calculer la fréquence observée f de A. La probabilité p devrait appartenir à l'intervalle de confiance $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$. Il faut que je me débrouille pour trouver une modélisation donnant une probabilité p dans cette fourchette.

Le tableur établit dans ce cas un pronostic.

Le cas Bougnègue.

Dans ce sujet, et dans quelques autres du même tonneau, Bougnègue prétend utiliser son tableur pour *démontrer*. Ce qui revient à considérer qu'une expérimentation a une portée universelle et à confondre conjecture et preuve. Une telle démarche est invalide. Savoir élaborer une simulation sans en connaître les possibilités, les limites et le champ d'application n'est pas, à mon sens, une compétence.

La position de l'Institution sur la question est un peu plus ambiguë, Institution qui semble cibler comme « compétence » la construction d'une simulation numérique indépendamment de son emploi (?). Je conseillerais aux candidats de prendre l'avis, primordial, de leurs préparateurs CAPES sur cette question « sensible ».