

ESD2017_3c01. Suites

On apprend ici que, si les péchés capitaux comme les samouraïs et les boules de cristal sont sept, les Rônins 47, les commandements dix, les doigts de la main cinq, les muses neuf et les cavaliers de l'Apocalypse comme les mousquetaires quatre, les compétences, quant à elles, sont au nombre de six. Par bonheur pour elles, elles ne sont pas douze comme Lee Marvin et ses acolytes.

1. Le sujet

A. Exercice

On souhaite placer un capital de 1000 € sur un compte rémunéré. On propose deux types de placement :

- Placement U : rémunération à intérêts simples au taux annuel de 2 %.
- Placement V : rémunération à intérêts composés au taux annuel de 1,5 %.

1. Pour chacun des placements, déterminer le capital au bout de 1 an, puis de 2 ans.
2. Pour chacun des placements, combien d'années faut-il pour que le capital double ?
3. Quel est le meilleur de ces deux placements ?

B. Les réponses de deux élèves d'une classe de STMG

Elève 1.

On se rend compte ci-contre que le capital double au bout de 50 ans avec le placement U et 47 ans avec le placement V.

	A	B
40	1800	1814,02
41	1820	1841,23
42	1840	1868,85
43	1860	1896,88
44	1880	1925,33
45	1900	1954,21
46	1920	1983,53
47	1940	2013,28
48	1960	2043,48
49	1980	2074,13
50	2000	2105,24
51	2020	2136,82
52	2040	2168,87

Elève 2.

$$1000 + 20 \times 50 = 2000 \text{ et } 1000 \times 1,015^{47} \approx 2013$$

Le capital double au bout de 50 ans avec le premier et 47 avec le deuxième.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez la production de chaque élève selon les six compétences de l'activité mathématique.
2. Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale STMG.
3. Proposez trois exercices sur le thème *suites* dont un au moins au niveau terminale S. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves

2. Eléments de correction

Voici un exercice qui contextualise une comparaison de deux suites, l'une géométrique et l'autre arithmétique, thème explicitement au programme d'une classe de terminale STMG par exemple.

Cet exercice met en scène et compare en effet deux types d'évolution : d'une part une évolution à variation absolue constante, évolution dont la modélisation discrète amène à une suite arithmétique, d'autre part une évolution à variation relative constante, évolution dont la modélisation discrète amène à une suite géométrique (voir REDCM pages 125 et 126).

On imagine que l'auteur de l'exercice a trouvé cet énoncé dans l'excellent Queysanne-Revuz 1975 et a simplement actualisé les valeurs numériques. Il y a une quarantaine d'années en effet, lorsque le taux d'inflation était à deux chiffres, et les taux d'intérêt aussi par voie de conséquence, chaque professeur de mathématiques des classes de première (et moi comme les autres) posait chaque année LE problème d'un placement à taux d'intérêt simple (type de placement qui au demeurant n'existe pas ...), placement qui attendait qu'un autre, à taux d'intérêt composé (taux un peu plus faible, cela va de soi) veuille bien le rattraper. Epoque bénie d'un monde perdu où sept ou huit ans tout au plus suffisaient pour doubler ^{gi} la mise.

De nos jours, ce même problème est toujours posé. Sauf que les taux d'intérêt ont considérablement baissé. Du coup, les questions 2 et 3 deviennent quelque peu désuètes. Maintenant, ce n'est plus le rentier lui-même mais les petits-enfants du rentier qui raflent le magot.

La faible inflation actuelle l'a mal fait vieillir : Attendre 50 ans avant que le capital ne double, bigre ! Quant au meilleur placement, moi je trouve que c'est le premier et ma petite fille, du haut de ses cinq ans et demi, trouve que c'est le deuxième. Il reste à comparer avec le rendement d'un compte en Suisse ^{gibertjulia2018}.

1. Analyse de travaux d'élèves.

Les deux élèves fournissent une réponse correcte. Essentiellement, leur démarche diffère par la façon de modéliser la situation proposée. Bougnègue utilise son tableur pour exprimer le capital obtenu en fonction du nombre d'années de placement, tandis que l'élève 2 utilise des formules explicites pour exprimer ces mêmes capitaux.

Bougnègue	Elève 2
Elabore une simulation numérique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel. Sa solution étant exhaustive est recevable.	Traduit en langage mathématique une situation réelle à l'aide de suites. Le symbole \approx n'a toutefois aucun sens mathématique. Il faudrait faire préciser à cet élève les deux termes consécutifs qui sont séparés par la valeur 2000, celui juste avant, celui juste après.

Faire un inventaire selon chacune des « six compétences » comme demande le sujet serait évidemment une affaire de xyloglossie.

2. Une correction d'exercice.

L'élève 2 ouvre la voie à une correction de l'exercice au niveau spécifiquement terminale. On aura à

comparer la suite (u_n) définie par : ^{gibertjulia2018}
$$\begin{cases} u_0 = 1000 \\ u_{n+1} = u_n + 0.02 \times u_0 \end{cases}$$
 et la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 1000 \\ v_{n+1} = v_n + 0.015 \times v_n \end{cases} \quad \text{.}$$

On insistera sur la différence entre les deux relations de récurrence et leurs conséquences sur la nature de chaque suite et leur formule explicite (que l'élève 2 devrait être en mesure de préciser). Dans le cas d'un

intérêt simple, c'est toujours le capital initial u_0 qui est rappelé dans la relation de récurrence pour obtenir les intérêts produits, tandis que dans le cas d'un intérêt composé, c'est le capital précédent.

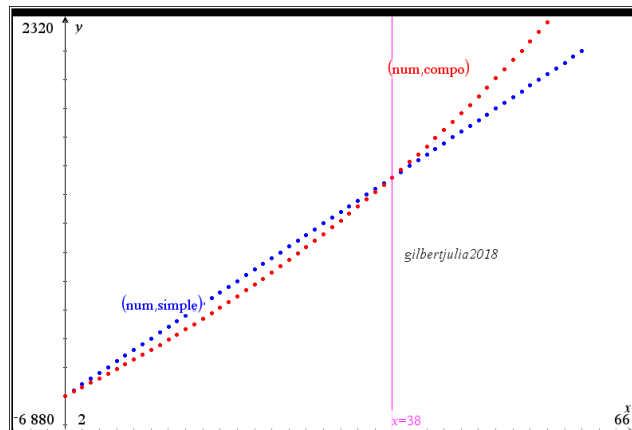
Bougnègue représenterait plutôt une correction de niveau polyvalent première ou terminale.

On insistera sur la différence entre les deux formules entrées sur la ligne 2 du tableau suivant qu'on considère une capitalisation simple ou composée et les effets lorsqu'on recopie vers le bas.

Dans la cellule **c2**, l'adressage est absolu : $=c1+0,02\times\$c\1 tandis que dans la cellule **c2**, l'adressage est relatif : $=d1+0,015\times d1$.

		C simple	D compo	E	F	G
=	=seq(k,k,0,60					
1	0.02	0	1000	1000	gilbertjulia2017	
2	0.015	1	1020.	1015.		
3		2	1040.	1030.23		
4		3	1060.	1045.68		
5		4	1080.	1061.36		
6		5	1100.	1077.28		
7		6	1120.	1093.44		
8		7	1140.	1109.84		
9		8	1160.	1126.49		
10		9	1180.	1143.39		
11		10	1200.	1160.54		
12		11	1220.	1177.95		

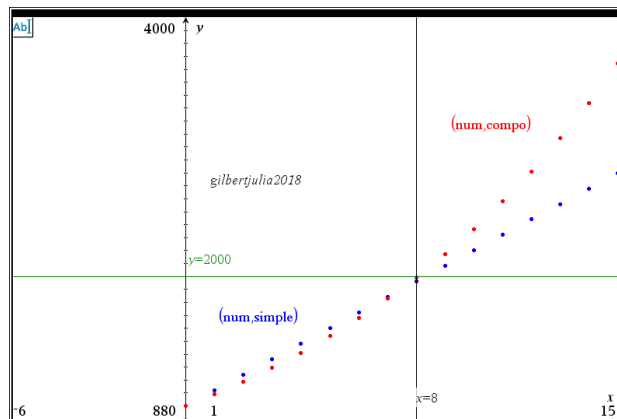
L'utilisation d'un tableau possède un avantage important : les deux nuages de points présentant les capitaux en fonction de la durée de capitalisation peuvent être rapidement représentés, ce qui facilite la comparaison des deux évolutions, l'une affine et l'autre « exponentielle ».



Il n'est pas interdit de faire un peu d'histoire et de raconter aux élèves qu'au siècle précédent, l'inflation était à deux chiffres, les taux d'intérêt dépassaient 10 % et le monde tournait.

On reprend l'exercice à la mode seventies, avec par exemple un taux d'intérêt simple de 12 % et composé de 9 % (pour fixer un ordre d'idées et prendre le même rapport entre les deux taux).

Qu'observe-t-on ?



3. Commentaire

La question 1 posée par le jury, dont le caractère grotesque n'échappera à personne au vu des deux fois deux lignes des productions d'élèves, montre que ce sujet a été rédigé par des as de la compétence.

Peut-être même des virtuoses ... Il n'y a rien à ajouter, la démonstration est magistrale.