ESD2017_19. Prise d'initiative

1. Le sujet

A. Exercice

On se place dans un repère $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$ et on considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2 + x + 1$ ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -3x + p$, où p est un paramètre réel.

Existe-t-il des valeurs de p pour lesquelles la parabole $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ admettent des points d'intersection à coordonnées entières ?
Si oui, déterminer toutes les valeurs de p qui conviennent.

B. Les réponses de deux élèves de première scientifique

Élève 1
Avec un logiciel de géométrie dynamique, j'ai tracé la parabole $\mathscr{P}$ et différentes droites $\mathscr{D}$ en prenant différentes valeurs pour p. Ensuite, j'ai demandé les points d'intersection.
Je trouve que p peut prendre les valeurs : -3 ; -2 ; 1 ; 6 ; 13 ; 22. . .
En fait, pour trouver les p, il faut rajouter les nombres impairs.

Élève 2
On choisit un entier a et on considère le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse a.
Ensuite, on cherche la valeur de p pour que la droite $\mathscr{D}$ passe par ce point.
On a alors : $a^2 + a + 1 = -3a + p$ *et donc* $p = a^2 + 4a + 1$
Il existe donc une infinité de valeurs de p qui marchent.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et en mentionnant les conseils que vous pourriez leur apporter.

2. Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.

3. Proposez deux exercices sur le thème *prise d'initiative*, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. Vous motiverez vos choix en précisant les objectifs visés par chacun d'eux.

2. Eléments de correction

Voici un problème classé à juste raison dans le thème « *prise d'initiative* ».

Ce problème pose implicitement deux questions : une question d'*existence* à laquelle il est relativement facile de répondre (il suffit d'exhiber un exemple d'entier p pour lequel $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{P}$ en des points entiers) et une question de *détermination* d'un ensemble, plus difficile.

Il n'est pas possible de répondre directement et simultanément aux deux questions implicitement posées. Il faut pour cela reformuler le problème (trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ soient des points entiers), comme le fait partiellement l'élève 2.

1. Analyse des travaux d'élèves.

Chouquerouste.

Tel Lucky Luke son Colt, Chouquerouste a dégainé son logiciel de géométrie dynamique plus vite que son ombre.
Aujourd'hui, à part le tracé de $\mathcal{P}$ et de « différentes droites », nous avons très peu d'informations. Aucune information sur la façon dont il s'y est pris pour choisir « différentes droites » (considérer de $p=-3$ à $p=22$, cela fait beaucoup, comment y a-t-il pensé ?). De plus, « *il faut rajouter les nombres impairs* » ressemble à un oracle de Delphes.

Réussite :

- Chouquerouste donne une réponse satisfaisante à la question d'*existence*. De sa production, on peut extraire plusieurs exemples de droites $\mathcal{D}$ qui coupent $\mathcal{P}$ en des points entiers.
- Selon l'interprétation la plus probable de son oracle, il semble avoir repéré une régularité dans la suite des valeurs de p qu'il a obtenues (de 1 à 6 on rajoute 5, de 6 à 13 on rajoute 7, de 13 à 22 on rajoute 9 …). Mais dans ce cas il confond conjecture et démonstration puisqu'il déduit une loi générale d'un comportement observé sur quelques exemples.

Erreur. Chouquerouste ne règle en rien la question de *détermination* des entiers p qui conviennent. Il en est resté à un stade expérimental, et sa position par rapport au problème posé est celle d'un observateur.

Le meilleur conseil à donner à Chouquerouste serait de « passer à autre chose », de s'engager dans une étude mathématique des coordonnées des points d'intersection.

On peut aussi lui demander d'expliciter sa conjecture (structurer le passage d'une valeur de p à la valeur suivante) mais la *démontrer* risque pour lui de s'avérer des figues d'un autre panier.

Elève 2

Cet élève interprète la question posée : Si p convient, alors il paramètre une droite passant par un point de $\mathcal{P}$ à coordonnées entières. Il obtient ainsi une condition nécessaire pour que p soit susceptible de convenir.
C'est une démarche intéressante que l'on peut faire aboutir.

Réussites

- Sa modélisation de la situation. Il a su traduire la question posée en langage mathématique, bien que sa traduction soit partielle (l'équivalence de sa condition avec celle de la question posée n'est pas garantie).
- Le traitement mathématique qu'il en fait (exprimer p en fonction de a).
- Il a conscience qu'il y a une infinité de valeurs de p susceptibles de convenir.

Erreur

- Sa démarche est inaboutie car il ne caractérise pas quelles sont les valeurs de p qui conviennent. Il manque à sa production une étude réciproque (en général, une droite $\mathcal{D}_p$ passant par un point à coordonnées entières admet un deuxième point d'intersection avec $\mathscr{P}$; ce point a-t-il aussi des coordonnées entières ? Si oui, p convient, si non il ne conviendra pas)

Il faudrait d'abord faire préciser un détail à cet élève : ce qu'il entend par « a entier » (quel type d'entier ? son texte est ambigu sur ce point).

Ensuite et surtout faire tester si réciproquement, lorsque p appartient à $\{1+4a+a^2\ ;\ a\in Z\}$, alors les *deux* points d'intersection de $\mathscr{D}_p$ avec $\mathscr{P}$ sont à coordonnées entières.

2. Une correction de l'exercice.

On note $\mathscr{D}_p$ la droite d'équation $y=-3x+p$

Deux options au moins :

Option 1 : résolution « classique » :

On cherche si $\mathscr{D}_p$ coupe $\mathscr{P}$ et si elle le fait, dans quel cas elle le fait en des points à coordonnées entières.

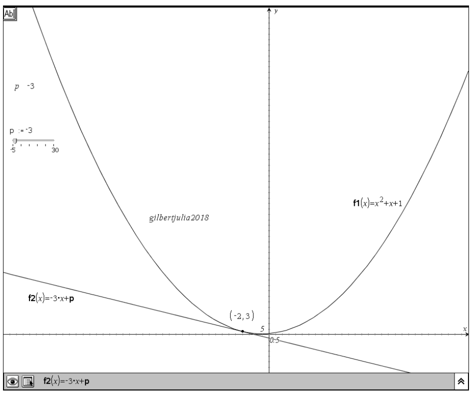
Un point $M(x\ ;\ y)$ est point d'intersection de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{D}_p$ si et seulement si ses coordonnées vérifient le système : gilbertjulia2018 $\begin{cases} y=x^2+x+1 \\ y=-3x+p \end{cases}$, c'est-à-dire si et seulement si : $\begin{cases} x^2+4x+1-p=0 & (1) \\ y=-3x+p & (2) \end{cases}$

L'équation (1) est une équation du second degré dont le discriminant est $4(p+3)$. (1) a deux solutions distinctes ou confondues lorsque $p\geq -3$ qui sont : $x=-2\pm\sqrt{p+3}$. Il s'agit de nombres entiers si et seulement si $\sqrt{p+3}$ est un entier positif ou nul, c'est-à-dire si et seulement il existe un entier naturel k tel que : $p=-3+k^2$.

Cette condition est nécessaire et suffisante pour que ce point soit à coordonnées entières puisque si l'abscisse de M est un entier, alors son ordonnée $-3x+(-3+k^2)$ est aussi un entier.

On conclut que l'ensemble des réels p qui conviennent est exactement l'ensemble $\{p=-3+k^2\ ;\ k\in N\}$

Une figure dynamique comme celle de Chouquerouste illustrerait si utile quelques propriétés de la position relative de la droite $\mathscr{D}_p$ et de la parabole $\mathscr{P}$**.** On recoupe les résultats de la discussion algébrique.



- Si $p<-3$, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}_p$ n'ont aucun point d'intersection.
- Si $p=-3$, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}_p$ ont un point d'intersection à coordonnées entières (ce qui règle déjà la question d'existence).
- Si $p>-3$, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}_p$ ont deux points d'intersection.

Option 2

On reprend la démarche de l'élève 2, en faisant remarquer que l'élève 2 démontre une implication : si p convient, alors il existe un entier relatif a tel que : $p=a^2+4a+1$. Il convient d'étudier une éventuelle réciproque.

Réciproquement, s'il existe un entier relatif a tel que $p = a^2 + 4a + 1$, la droite D_{a^2+4a+1} coupe $\mathscr{P}$ en $A(a\,;\,a^2 + a + 1)$ et en le point dont l'abscisse est la deuxième solution de l'équation : $x^2 + x + 1 = -3x + a^2 + 4a + 1$, c'est-à-dire la deuxième solution de l'équation $x^2 + 4x - a^2 - 4a = 0$. Cette deuxième solution est : $a' = -a - 4$. Si a est un entier relatif, a' aussi, donc les deux points d'intersection sont tous les deux à coordonnées entières, p convient.
En notant que $p = a^2 + 4a + 1 = (a+2)^2 - 3$, on obtient tous les réels p convenables lorsque a décrit seulement l'ensemble des entiers relatifs supérieurs ou égaux à -2
On conclut que l'ensemble des réels p qui conviennent est exactement l'ensemble $\{p = a^2 + 4a + 1\,;\, a \in Z,\, a \geq -2\}$. En posant $k = a + 2$, on rejoint les conclusions de l'option 1.

Il est possible de revenir sur la *conjecture* de Chouquerouste. Selon lui, pour passer d'une valeur de p à la valeur suivante « on rajoute un nombre impair ».
Si on structure cette idée, les entiers p qu'il a trouvés seraient les premiers termes d'une suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = u_n + (1 + 2n) \end{cases}$.
On vérifiera qu'effectivement cette conjecture est exacte, en démontrant par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_n = -3 + n^2$.
Pour tout entier n strictement positif, son carré est en effet la somme des n premiers nombres impairs :

$$n^2 = \sum_{i=0}^{i=n-1} (1 + 2i)$$

Mais la solution de Chouquerouste ne garantit pas qu'ainsi on obtient *tous* les réels p qui conviennent.

3. Commentaires

3.1. Ce sujet illustre bien une difficulté que rencontrent inexorablement les candidats au CAPES. Le thème *prise d'initiative* est à cet égard caractéristique.

En effet, cet exercice ouvert est favorable à plusieurs pistes de résolution. Il n'est guère possible à un candidat de les explorer toutes, ou même d'en explorer plusieurs, dans le temps de préparation qui lui est dévolu, temps qu'il doit partager entre l'analyse de l'exercice-jury et la mise au point de ses propres exercices.

En admettant que plusieurs pistes aient été explorées, il sera de toute façon très difficile de s'y attarder dans le temps très court d'exposé. Aller à l'essentiel est une nécessité.

Il appartient au candidat de faire un choix. Est-il mieux de « rebondir » à partir d'une production d'élève, ce qui est en général payant ? Ou bien est-il mieux de s'en tenir à une résolution « classique », valeur sûre un peu plus performante ici ? Je n'ai pas la réponse et sans doute on ne peut donner une réponse universelle. À chacun de se déterminer au cas par cas.

3.2. « *pour trouver les p, il faut rajouter les nombres impairs* », est une phrase sibylline de nature à dérouter plus d'un candidat et qui aurait méritée d'être un peu plus précise. Il est légitime de ne pas tout décrypter dans une production d'élève. D'autant que, en l'occurrence, on ne peut pas interroger physiquement ledit élève et que sa matérialité reste à prouver …