# ESD 2014_18 : Prise d'initiative

## 1. Le sujet

### A. L'exercice proposé au candidat

Kaprekar est un mathématicien indien contemporain (1905-1986) bien connu pour son habileté en calcul.
Il aimait proposer le jeu suivant :

« Pense à un nombre de trois chiffres, tous différents. Ecris le nombre le plus grand que tu peux former avec ces trois chiffres, puis soustrais-lui le nombre le plus petit que tu peux obtenir. Recommence avec le nombre obtenu. Fais cette opération cinq fois. En attendant, j'écris sur un papier le résultat que tu vas trouver. »

Qu'en pensez-vous ?

### B. Les réponses de trois groupes d'élèves

| | |
|---|---|
| *Groupe 1*<br><br>*Nous avons essayé tous les cas avec un algorithme.*<br>*Nous trouvons presque toujours* 495, *mais des fois on obtient* 0. | **pour** *$N$ variant de* 1 *à* 999 **faire**<br>  **pour** *$k$ variant de* 1 *à* 5 **faire**<br>    *$a$ prend la valeur partie enti* $/100$<br>    *$b$ prend la valeur partie enti* $(N-a\times 100)/10$<br>    *$c$ prend la valeur* $N-100\times a-10\times b$<br>    *$d$ prend la valeur* $\max(a,b,c)$<br>    *$f$ prend la valeur* $\min(a,b,c)$<br>    *$e$ prend la valeur* $a+b+c-d-f$<br>    *$N$ prend la valeur* $d\times 100+e\times 10+f-f\times 100-e\times 10-d$<br>  **fin**<br>  *Af*<br>**fin** |

*Groupe 2*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *Avec* 471, $\boxed{471}$ | $741-147=\boxed{594}$ | $954-459=\boxed{495}$ | $954-459=\boxed{495}$ | $954-459=\boxed{495}$ |
| *Avec* 691, $\boxed{691}$ | $961-169=\boxed{792}$ | $972-279=\boxed{693}$ | $963-369=\boxed{594}$ | $954-459=\boxed{495}$ |
| *Avec* 879, $\boxed{879}$ | $987-789=\boxed{198}$ | $981-189=\boxed{792}$ | $972-279=\boxed{693}$ | $963-369=\boxed{594}$ |

*On a essayé avec* 471, 691, 879 *on a trouvé* 198, 792, 693, 594 et 495.
*On a remarqué que la différence finissait par faire* 99.

*Groupe 3*
*Si on appelle c le chiffre des centaines, d celui des dizaines et u celui des unités :*
$(100c+10\ d\ +u)-(100u+10\ d\ +c)=99(c-u)$.
*Comme c et u sont des chiffres, on ne peut obtenir que* 8 *résultats.*

### C. Le travail à exposer devant le jury

**1.** Analysez les productions de chaque groupe en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles, ainsi que l'accompagnement que vous pourriez leur proposer pour les aider à progresser.

**2.** Présentez la correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

**3.** Proposez deux exercices sur le thème *prise d'initiative*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

## 2. Eléments de correction

L'arithmétique est un domaine privilégié où s'exercent tous les types de raisonnement mathématique et où la prise d'initiative est de mise. L'ancien thème « *différents types de raisonnements* », qui a maintenant disparu des radars, puisait largement dans cette rubrique. Cet exercice illustre parfaitement l'intérêt de l'arithmétique de ce point de vue.

On ne saurait favoriser davantage l'initiative que ne le fait cet énoncé.
Aucune question précise n'est posée : « qu'en pensez vous ? » invite les élèves à se poser eux-mêmes une « bonne question ».

On attend d'eux qu'ils comprennent que, si le résultat peut être écrit à l'avance sur un papier, c'est que ce résultat est le même quel que soit le nombre choisi. Il restera à justifier cette conjecture par un raisonnement.

**1. Analyse des travaux d'élèves.**

*Groupe 1.*
Ce groupe utilise un algorithme pour construire une solution *exhaustive* du problème. Il y a moins de 1000 (720 exactement) nombres sur lesquels cette expérience s'exerce, il est tout à fait possible de les tester un par un à l'aide d'un algorithme.

L'algorithme astucieusement construit proposé par ce groupe a pour objectif d'appliquer à chaque entier entre 000 et 999 l'opération telle que décrite par Kaprekar. On peut supposer que ce groupe a ensuite itéré de lui-même sur les entiers trouvés puisque l'algorithme ne comporte aucune boucle.
La résolution aurait été en tout point recevable (puisque exhaustive, un test qui étudie tous les cas possibles a valeur de démonstration) si ce groupe avait su distinguer dans quel cas ils trouvaient zéro et quelle était l'hypothèse de l'énoncé qui éliminait cette éventualité.

*Réussites :*
- La construction pertinente et la mise œuvre de l'algorithme.
- Les connaissances en numération nécessaires pour la construction de l'algorithme
- L'idée de tester tous les cas possibles.

*Erreur* :
- L'algorithme ne distingue pas des autres les entiers à trois chiffres dont deux au moins sont identiques. Une hypothèse de l'énoncé (trois chiffres différents) n'est pas prise en compte.

Il faudrait faire expliciter à ce groupe quels sont les cas dans lesquels « ils trouvent zéro ». Et si possible, faire modifier l'algorithme de façon à éliminer ces cas. On verra plus loin qu'ils auraient dû aussi « de temps en temps » trouver 594, cas qu'ils devraient éliminer également.

*Groupe 2.*
Ce groupe étudie trois exemples pour observer des régularités. Curieusement, ce groupe effectue au plus quatre itérations alors que le cas de 879 en nécessitait une cinquième. Ce groupe en reste au stade de l'observation.

*Réussites* :
- Observer quelques régularités (en particulier deviner un lien avec 99)

*Erreurs :*
- L'expérimentation reste inaboutie puisqu'elle ne va pas jusqu'à la cinquième itération. Toutes les régularités ne sont pas observées.
- Aucune tentative de justification.

Il faudrait d'abord faire achever à ce groupe toutes les itérations puis leur demander de trouver une explication au rôle de 99 dans cette histoire.

*Groupe 3.*
Le seul des trois groupes à s'engager dans un raisonnement arithmétique pertinent, basé sur les propriétés de la numération décimale.

*Réussites* :

- Avoir su traduire la question implicitement posée en langage mathématique
- Avoir utilisé à bon escient la numération décimale pour expliquer le rôle de l'entier 99 dans ce problème.
- Distinguer clairement la notion de chiffre de celle de nombre

*Erreur*

- La démarche reste inaboutie puisque ce groupe arrête son raisonnement après la première opération.

Il faudrait encourager les élèves à expliciter les 8 résultats (il ne semble pas qu'ils l'aient fait). Dès lors qu'il n'y a plus que 8 entiers à considérer, cela change la donne.

**Une correction de l'exercice.**

On reprend les exemples du groupe 2, quitte même à en ajouter d'autres. On note les régularités, notamment :
Le chiffre des dizaines est toujours égal à 9, le nombre obtenu après une opération est un multiple de 99, on obtient tôt ou tard 495.

Il reste à expliquer ces particularités.

La production du groupe 3 donne l'idée d'exploiter les propriétés de l'écriture canonique d'un entier en numération décimale.

On note $N_1 = \overline{c\,d\,u}$ un nombre de trois chiffres tel que $c > d > u$ et on note $N_2 = \overline{u\,d\,c}$ le nombre obtenu en inversant l'ordre des chiffres.
Alors :  $N_1 - N_2 = (100c + 10\ d\ + u) - (100u + 10\ d\ + c) = 99(c-u)$.
La différence est un multiple de 99. Puisque $c > d > u$, $2 \le c-u \le 9$. La différence $c-u$ peut être égale à 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9.
Le résultat obtenu après la première opération est l'un des entiers suivants : {198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891}. (On confronte avec les régularités observées)

Si on itère la même opération, l'itération a lieu sur l'un des entiers $N_1$ suivants : {981, 972, 963, 954}, il n'y a plus que quatre entiers à prendre en compte.
La différence $c-u$ peut être égale à 5, 6, 7 ou 8.
Le résultat obtenu après la deuxième opération est l'un des entiers suivants : {495, 594, 693, 792}

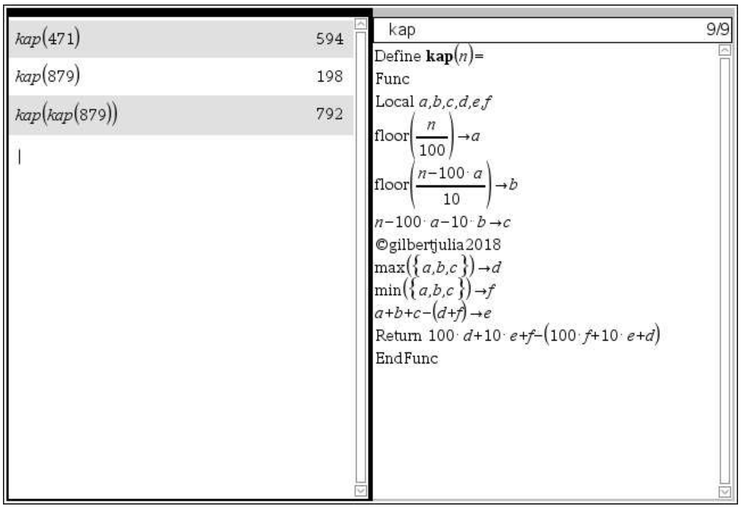
Si on itère la même opération, l'itération a lieu sur l'un des trois entiers $N_1$ suivants : {972, 963, 954}.
La différence $c-u$ peut être égale à 5, 6 ou 7.
Le résultat obtenu après la troisième opération est l'un des entiers suivants : {495, 594, 693}

Si on itère la même opération, l'itération a lieu sur l'un des entiers $N_1$ suivants : {963, 954}.
La différence $c-u$ peut être égale à 5 ou 6.
Le résultat obtenu après la quatrième opération est l'un des deux entiers suivants : {495, 594}

Lors de la cinquième opération, le résultat est nécessairement 495.

L'algorithme du groupe 1, éventuellement amélioré, peut servir de validation.

La fonction **kap** applique l'opération décrite dans l'énoncé à tout entier à 3 chiffres.




En appliquant la fonction **kap** à tous les entiers de 0 à 999, on vérifie que, lorsque les trois chiffres sont tous différents, le résultat obtenu après 5 itérations est toujours 495.

| | A num | B op1 | C op2 | D op3 | E op4 | F op5 | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| = | =seq(k,k,0 | =seq(kap( | =seq(kap( | =seq(kap( | =seq(kap( | =seq(kap( | | |
| 217 | 216 | 495 | 495 | 495 | 495 | 495 | | |
| 218 | 217 | 594 | 495 | 495 | 495 | 495 | | |
| 219 | 218 | 693 | 594 | 495 | 495 | 495 | | |
| 220 | 219 | 792 | 693 | 594 | 495 | 495 | | |
| 221 | 220 | 198 | 792 | 693 | 594 | 495 | | |
| 222 | 221 | 99 | 891 | 792 | 693 | 594 | | |
| 223 | 222 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | gilbertjulia2018 | |
| 224 | 223 | 99 | 891 | 792 | 693 | 594 | | |
| 225 | 224 | 198 | 792 | 693 | 594 | 495 | | |
| 226 | 225 | 297 | 693 | 594 | 495 | 495 | | |
| 227 | 226 | 396 | 594 | 495 | 495 | 495 | | |
| 228 | 227 | 495 | 495 | 495 | 495 | 495 | | |
| 229 | 228 | 594 | 495 | 495 | 495 | 495 | | |

On distingue les cas où l'on obtient zéro (trois mêmes chiffres) et les cas où l'on obtient 594 (la différence entre le chiffre le plus grand et le chiffre le plus petit est égale à 1, comme 221 ou 223, ou aussi 343 ou 545) ; il faudrait une sixième itération pour obtenir 495.

Il est étonnant que le groupe 1 n'ait pas cité 594. Il est possible que ce groupe ait itéré jusqu'à obtenir 495, sans compter le nombre d'itérations.

## 3. Conclusion

L'arithmétique, comme dit en préambule, se prête volontiers à la mise en œuvre de différents types de raisonnement. Nous voyons ici exhaustivité ou bien implication et ensuite soit exhaustivité (examen des 8 nombres obtenus après une première opération) soit disjonction de cas (on pouvait envisager peut-être de raisonner suivant la valeur de $c-u$, je n'ai pas exploré cette piste).

L'exercice d'aujourd'hui se prête bien à une « démarche d'investigation », telle qu'elle est décrite dans les programmes.
Lorsqu'un tel exercice est proposé à une classe (en activité dirigée par exemple), l'enseignant a un rôle important à jouer pour susciter et entretenir cette démarche. Il faut que les élèves « mordent » dans l'activité qui leur est proposée et ne jettent pas l'éponge trop tôt. Ce n'est pas toujours une tâche facile pour l'enseignant d'obtenir ce volontariat.
En cette occurrence, après une première recherche sans aucune indication, si vraiment rien de concret n'est proposé par les élèves, l'enseignant peut prévoir de faire une pause et un bilan intermédiaire : « qu'obtient-on après une première opération ? Pourquoi ? ». Le groupe 3 donne une réponse satisfaisante à cette question. Une fois inventoriés les 8 résultats, il est possible de relancer « Que va-t-on faire maintenant ? » de façon à favoriser une nouvelle initiative (maintenant, on va examiner chacun des huit cas un par un).