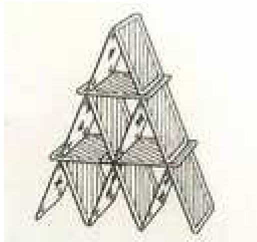
ESD2017_14. Problèmes à prise d'initiative

1. Le sujet

Exercice

On se propose de construire un château de cartes selon le modèle ci-contre.



Château de cartes à trois étages.

1. Combien de cartes sont utilisées si on construit ainsi dix étages ?

2. Combien d'étages peut-on construire avec 10000 cartes et combien restera-t-il de cartes ?

Les réponses de deux élèves

Elève 1 (Collège)

1. À chaque étage de cartes, il y a trois cartes de plus qu'à l'étage au dessus. J'ai utilisé le programme ci-contre et j'ai trouvé qu'il y avait 155 cartes pour dix étages.

2. En utilisant un programme ressemblant pour 10000 cartes, j'ai montré que l'on peut faire 81 étages et qu'il restera 118 cartes.

Elève 2 (Lycée).

1. Je note pour n entier naturel u_n le nombre de cartes utilisées pour construire le n-ième étage. Comme pour chaque nouvel étage il faut ajouter 3 *cartes par rapport à l'étage précédent, j'en déduis que (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 avec* $u_0 = 2$.

$u_0 + u_1 + ... + u_{10} = \frac{(2+2+3\times 10)}{2}\times 10 = 170$. *Il faut* 170 *cartes pour faire dix étages.*

2. Je procède de même en cherchant le plus grand entier n tel que $u_0 + u_1 + ... + u_n \leq 10000$

$$u_0 + u_1 + ... + u_{10} = \frac{(2+2+3\times 10)}{2}\times 10 = 170$$

$$\frac{(2+2+3\times n)}{2} \leq 10000 \quad ; \quad 3n^2 + 4n - 20000 \leq 0.$$

En m'aidant du discriminant, je trouve $n = 80$.

J'ai ainsi utilisé $\frac{(2+2+3\times n)}{2} = 9760$ *cartes, il en reste donc* 240.

Le travail à exposer devant le jury

1. Analyser les démarches de chaque élève, en mettant en évidence leurs réussites leurs erreurs éventuelles, ainsi que l'accompagnement que vous pourriez leur proposer pour les aider à progresser.

2. Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe.

3. Proposez deux trois exercices sur le thème *problème à prise d'initiative*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences qu'ils permettent de développer chez les élèves.

2. Eléments de correction

Voici un exercice qui contextualise la notion de somme de termes d'une suite arithmétique. Il est ici proposé dans la rubrique « problème à prise d'initiative ». C'est effectivement le cas au niveau du collège, où il peut donner lieu à une activité de recherche puisque l'outil principal de résolution n'est pas connu à ce niveau. En revanche, au niveau du lycée, cet exercice est plutôt un exercice de réinvestissement. La production de l'élève 2 montre d'ailleurs que la formule donnant une somme de termes d'une suite arithmétique est déjà connue. Les deux questions, judicieusement choisies, sont du modèle codage / décodage : d'un nombre d'étages au nombre de cartes nécessaires puis d'un nombre de cartes au nombre d'étages possibles.

1. Analyse de travaux d'élèves.

Chouquerouste (essayons de garder notre sérieux devant le surréalisme de cette production).
Propose une solution correcte et de bonnes réponses.
Réalise un programme Scratch avec une boucle itérative. Il est probable que le « programme ressemblant » comporte un test d'arrêt du style « Tant que … ». Aux spécialistes du programme Scratch (dont je reconnais l'intérêt et avec lequel les candidats doivent se familiariser) de commenter davantage.

Elève 2.
Cet élève s'engage dans une démarche pertinente exploitant l'outil des suites. Deux erreurs imbriquées font échouer le traitement mathématique qu'il doit conduire.

Réussites	*Erreurs*
Une bonne compréhension de la situation, qu'il analyse en détaillant le passage d'un étage à l'étage immédiatement inférieur	Une erreur d'harmonisation des index en considérant le premier étage comme « index zéro », mais dans ce cas le *n*-ième étage est l'index $n-1$
Identification correcte de la notion sous-jacente à une modélisation par une suite dans ce contexte (suite arithmétique et somme des termes d'une suite arithmétique)	Application d'une formule incorrecte donnant la somme des termes d'une suite arithmétique. Selon lui, $u_0+...+u_n=\frac{u_0+u_n}{2}\times n$
Résultats numériques cohérents avec sa modélisation	

Le choix de l'index zéro comme index initial provient du fait que, le plus souvent, le premier terme d'une suite est celui d'index zéro. Cet élève en a conclu que sur ce point le contrat didactique était : « Pour toutes les suites arithmétiques, le terme initial est toujours celui de rang zéro ». Ce choix est malheureux car il entraîne une erreur d'harmonisation des index. Une autre erreur portant sur la formule de calcul d'une somme est liée à cette harmonisation incorrecte.

Pour que cet élève se rende compte de son erreur, on peut lui conseiller de tester les formules qu'il propose pour de petites valeurs de *n*. Il lui appartiendra ensuite de faire en sorte que les formules qu'il utilise soient synchronisées avec la valeur de l'entier *n*.

Dans une synthèse portant sur l'expression d'une somme de termes (d'une suite arithmétique ou géométrique) il y a intérêt pour le professeur à proposer une formule principale (peut-être que la formule donnée par le professeur dans cette classe est $u_0+...+u_{n-1}=n\times\frac{u_0+u_{n-1}}{2}$ pour les suites arithmétiques) puis quelques variantes où l'on propose de changer l'index initial ou l'index final.
C'est vers cette voie que l'on peut diriger cet élève.

2. Une correction de l'exercice.

Au niveau lycée

On part de la remarque : « Soit u_n le nombre de cartes utilisées pour construire le n-ième étage. Comme pour chaque nouvel étage il faut ajouter 3 cartes par rapport à l'étage précédent, … (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 » mais on structure davantage la définition de cette suite : l'étage du haut porte le numéro 1, le terme initial est ainsi : $u_1 = 1$. On en déduit l'expression de u_i en fonction de i : $u_i = 2 + 3\times(i-1) = 3i-1$.

Le nombre S_n de cartes nécessaires pour construire un château de n étages est la somme des termes d'une suite arithmétique : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Il reste à traiter le calcul d'une telle somme (voir manuels).

Entre autres possibilités, le calcul de $2S_n$ sous la forme : $2S_n \underset{gjulia2017}{=} (u_1+u_n)+(u_2+u_{n-1})+...+(u_n+u_1)$ en remarquant que pour tout entier i tel que $1 \le i \le n$: $u_i + u_{n+1-i} = u_1 + u_n$

On obtient par cette méthode : $2S_n = n\times(u_1+u_n)$ puis $S_n = \dfrac{n\times(u_1+u_n)}{2}$ (distinguer la différence ave la formule de l'élève 2). Faire aussi remarquer que ce nombre est bien un nombre entier, quelle que soit la parité de l'entier n. En particulier : $S_{10} = 155$ ce que le collégien avait obtenu.

La recherche des entiers n tel que $S_n \le 10000$ conduit à la résolution dans **N*** de l'inéquation $\dfrac{n\times(3n+1)}{2} \le 10000$ et à la conclusion : $1 \le n \le \dfrac{-1+\sqrt{24001}}{6}$. Le plus grand d'entre eux est 81, il reste 118 cartes, ce que le collégien avait aussi obtenu.

Une variante.

La situation peut aussi s'étudier avec comme unique savoir la formule donnant une expression factorisée de la somme n des premiers entiers : $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. Pour cela, on incite les élèves à « décomposer » le château. Il faut construire à chaque étage les murs d'appartements de deux cartes et les planchers (qui sont plafonds pour l'étage du dessous). On note que le nombre de planchers est égal au nombre d'étages diminué d'une unité. Au niveau d'un étage, il y a un appartement de plus qu'à l'étage inférieur et le plafond a une carte de plus que le plancher. Pour n étages, on aboutit à :

$$S_n \underset{gilbertjulia2017}{=} 2\times(1+2+...+n)+(1+2+...+(n-1)) \text{ soit : } S_n = n(n+1)+\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n\times(3n+1)}{2}$$

3. Commentaire

Chouquerouste représente l'élève idéal que les partisans de l'algorithmique imaginent sur les bancs du collège. C'est-à-dire un élève capable, de façon autonome, d'analyser un problème se ramenant à une itération, de caractériser l'itération en question, de construire un algorithme prenant en charge cette action et d'agrémenter cet algorithme d'un test d'arrêt permettant d'obtenir le résultat souhaité. Tout cela est très séduisant. Encore faut-il que l'élève en question ait une culture mathématique générale suffisante pour appréhender ce type de problème avec suffisamment de hauteur. En est-on là dans une classe de collège ordinaire ? Il y a de quoi provoquer quelques quintes de toux.

Ici, très clairement, ce n'est pas un élève de collège authentique qui a rédigé le travail attribué à Chouquerouste, mais un nègre littéraire auquel on a demandé de chanter les louanges de Scratch, planqué dans l'arrière boutique du Ministère de l'Education Nnationale. Mission certes en tout point réussie : Chouquerouste a la même ingéniosité que Bibi Fricotin.