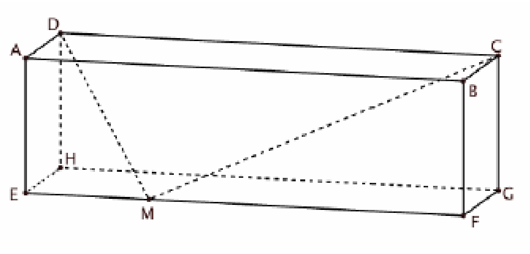
ESD2017_13. Géométrie dans l'espace

1. Le sujet

Exercice

On considère un pavé droit *ABCDEFGH* tel que $AB = 10$; $AD = AE = 3$ Soit *M* un point du segment [*EF*]. 1. Existe-t-il des positions de *M* telles que le triangle *DMC* soit rectangle en *M* ? 2. Existe-t-il des positions de *M* telles que le triangle *HMG* soit rectangle en *M* ?	

Les réponses de deux élèves d'une classe de terminale STD2A à la question 1

Elève 1
J'ai utilisé un logiciel de géométrie dynamique et j'ai trouvé deux positions pour lesquelles DMC est rectangle en M : lorsque EM ≈ 2,4 ou EM ≈ 7,6.

Elève 2
Je vais me placer dans un repère, j'ai choisi $\left(E\ ;\ \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EA}\right)$
$\overrightarrow{DM}$ *a pour coordonnées* $(x\ ; -1\ ; -1)$
$\overrightarrow{CM}$ *a pour coordonnées* $(x-1\ ; -1\ ; -1)$
Je calcule les longueurs DM et CM.
DMC est rectangle en M lorsque $2x^2 - 2x - 95 = 0$
Cette équation a une seule solution positive $x \approx 7{,}4$ *donc il existe une seule position de M.*

Le travail à exposer devant le jury

1. Analyser les productions de ces deux élèves, en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles.

2. Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale STD2A en vous appuyant sur les productions des élèves.

3. Proposez deux ou trois exercices sur le thème *géométrie dans l'espace* dont l'un au moins se situe au niveau collège. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

2. Eléments de correction

Voici un exercice portant sur l'étude d'une configuration mobile. Deux outils (produit scalaire, outil des configurations) peuvent être exploités pour résoudre l'exercice au niveau STD2A. La mobilité de la configuration favorise une expérimentation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

1. Analyse de travaux d'élèves.

Chouquerouste.
Il utilise son logiciel de géométrie dynamique pour simuler le déplacement de M sur l'arête $[EF]$ du parallélépipède et repérer empiriquement deux positions de M qui rendent le triangle DMC rectangle en M.

Réussites	*Echecs*
Ses résultats montrent qu'il a probablement su correctement modéliser la situation à l'aide de son logiciel de géométrie (construction du parallélépipède, choix de M comme « point sur segment », déplacement de ce point, détermination empirique probablement angulaire du triangle rectangle)	Chouquerouste en reste au stade de l'expérimentation, sans qu'il y ait de tentative de traitement mathématique pour justifier sa réponse
Expérimentation apparemment de bonne qualité, il obtient des valeurs approchées à moins de 0,1 près des distances EM convenables	

Il faudrait amener Chouquerouste à s'engager dans une modélisation mathématique de cette situation : « Le logiciel nous sert à *conjecturer* l'existence de deux positions convenables, mais peut-on préciser ces positions et les retrouver par le calcul ? »

Elève 2
La production de cet élève illustre une démarche attendue, exploitant la géométrie analytique.

Réussites	*Echecs*
Sa démarche est cohérente et pertinente : • Choix d'un repère • Calcul de longueurs utiles (exploitant la configuration du pavé) • Application de la réciproque du théorème de Pythagore pour déterminer dans quel cas le triangle est rectangle • Equation obtenue partiellement en cohérence avec sa vision de la situation (voir le bémol ci-contre)	Choix incorrect du repère, seulement orthogonal et non orthonormal. Donc un repère illicite pour effectuer des calculs de longueurs. Une autre erreur est que le statut de x n'est pas précisé. S'agit-il de la longueur EM ? Ou bien de l'abscisse de M dans le repère choisi ? En tout état de cause, on note une confusion à ce propos. Son équation provient de : $(x^2+1+1)+\left((x-1)^2+1+1\right)=100$ où il utilise d'une part les coordonnées des points utiles dans le repère qu'il a choisi, d'autre part la donnée $AB=10$. Il y a « deux poids, deux mesures ».

Pour faire prendre conscience à cet élève de son erreur, on pourrait proposer de calculer par exemple la longueur EF *à l'aide des coordonnées* de ces deux points. On s'attend à ce qu'il trouve 1, alors que $EF=AB=10$ par hypothèse. D'où vient cette anomalie ?

On pourrait aussi lui demander où se place le point M pour lequel, selon lui, le triangle est rectangle. Est-ce le point tel que $\overrightarrow{EM} \approx 7{,}4\,\overrightarrow{EF}$ et dans ce cas M est sur la table du voisin ou bien est-ce que c'est un point dont l'abscisse est entre 0 et 1 et dans ce cas il y a un problème au niveau des calculs de longueurs ?
La valeur 7,4 si elle représente l'abscisse de M dans le repère choisi, aurait due être rejetée comme l'a été la valeur négative.

2. Une correction de l'exercice.

On reprend l'idée de l'élève 2, rapporter l'espace à un repère. Cependant, quelles doivent être les caractéristiques du repère choisi pour que des calculs de longueurs ou de produits scalaires soient licites ?

On fait la distinction entre repère orthogonal (le choix de l'élève, on fait expliquer les raisons de ce choix, essentiellement sa commodité) et repère orthonormal.

Pour obtenir un tel repère et accorder commodité de calculs et légitimité, on peut considérer le repère $\left(E\,;\ \frac{1}{10}\overrightarrow{EF}, \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}, \frac{1}{3}\overrightarrow{EA}\right)$ dans lequel les points utiles ont pour coordonnées $F\,(10\,;0\,;0)$; $H\,(0\,;3\,;0)$; $A(0\,;0;3)$ et surtout $C(10\,;3\,;3)$ et $D(0\,;3\,;3)$.

Quant au point M, on fait expliciter par l'élève 2 ce que représente x. Le point M est sur « l'axe des x » du repère choisi (ce dernier a été « étudié pour » …), on désigne par une lettre son *abscisse*. Son appartenance au segment [EF] implique que : $0 \leq x \leq 10$ (on souligne l'importance de cette hypothèse qui détermine un intervalle dans lequel on va rechercher des solutions). Les grandeurs utiles s'exprimeront en fonction de x.

On fait expliciter à l'élève 2 la caractérisation d'un triangle rectangle qu'il a utilisée, la réciproque du théorème de Pythagore. « Si $DM^2 + CM^2 = CD^2$ alors CMD est rectangle en M ». On peut améliorer en utilisant les deux sens du théorème « CMD est rectangle en M si et seulement si $DM^2 + CM^2 = CD^2$ » (ce qui justifiera que, si on résout l'équation obtenue, alors on trouve toutes les solutions, il n'y en a aucune autre).

Il reste à calculer ...

Ce qui amènera à la résolution l'équation, d'inconnue x appartenant à $[0\,;10]$: $\left((x-10)^2+18\right)+\left(x^2+18\right)=100$ soit à l'équation $2x^2-20x+36=0$ et aux deux solutions $x=5-\sqrt{7}$ et $x=5+\sqrt{7}$ (programme de première). On vérifie que ces deux valeurs sont bien dans $[0\,;10]$.

Il existe deux positions de M, symétriques par rapport au milieu de [EF] (pourquoi cela ?) pour lesquelles le triangle est rectangle.

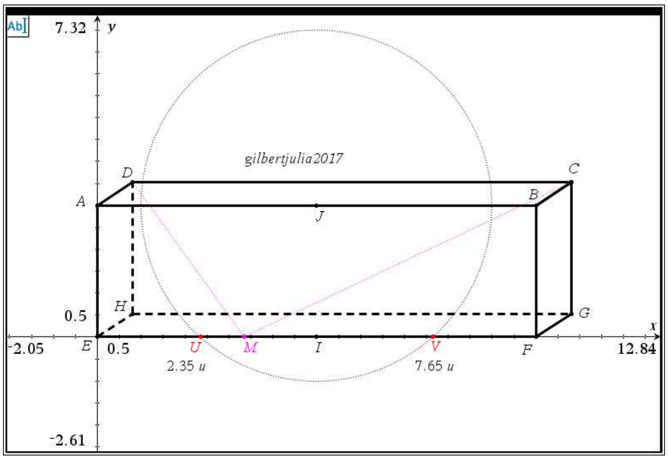
Cependant, en classe de terminale STD2A, l'usage du produit scalaire dans l'espace est explicitement au programme. Il est donc important de susciter ou proposer une solution exploitant cet outil : « CMD est rectangle en M si et seulement si $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=0$ ». Ce qui amènera à considérer les coordonnées de ces deux vecteurs $\overrightarrow{MC}\ (10-x,\ 3,\ 3)$ et $\overrightarrow{MD}\ (-x,\ 3,\ 3)$ puis à retrouver une équation équivalente à celle précédemment trouvée. C'est même un peu plus rapide que la solution « configurations ».

Quant à la production de Chouquerouste, elle peut être exploitée au choix en début d'étude pour conjecturer (« il semble bien qu'il y a deux positions convenables, on va essayer de les localiser très précisément ») ou à la fin pour valider les deux résultats théoriques.

On peut relancer la recherche à propos du triangle HMG en précisant que l'on cherche à rédiger une solution la plus courte possible.

Par exemple considérer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MH}\left(-x,\,3,\,0\right)$ et $\overrightarrow{MG}\left(10-x,\,3,\,0\right)$. Le calcul du produit scalaire $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MG}=x(x-10)+9=x^2-10x+9$ amène à résoudre l'équation $x^2-10x+9=0$ dont les solutions sont $x=1$; $x=9$.

Remarque. Les deux positions de M qui rendent DMC rectangle en M peuvent être construites facilement dans le plan frontal ($EFBA$) : le cercle de centre J milieu de $[AB]$ de rayon 4 tracé dans ce plan recoupe $[EF]$ en deux points U et V, symétriques par rapport au milieu I de $[EF]$. Ces deux points sont les points cherchés.



3. Commentaires

3.1. J'aurais tendance à intervertir l'ordre des deux questions …

3.2. L'exercice posant la question *d'existence* et non de *détermination*, un autre point de vue est envisageable, qu'il n'y a peut-être pas lieu de développer en STD2A (?), mais qui nonobstant est intéressant. Selon ce point de vue, l'interversion éventuelle des deux questions n'est pas utile :

On note K le milieu de $[CD]$ et L celui de $[EG]$.

Il existe des points M de $[EF]$ tels que DMC est rectangle en M si la sphère de centre K et de rayon 5 (c'est-à-dire de diamètre $[CD]$) a une intersection non vide avec $[EF]$. Or, la distance de K à la droite (EF) est égale à la distance de D à cette même droite puisque (CD) et (EF) sont parallèles. Cette distance est $DE=3\sqrt{2}<5$, plus petite que le rayon de la sphère. La sphère coupe la droite (EF) en deux points qui sont tous deux sur le segment $[EF]$ (puisque E et F sont clairement extérieurs à cette sphère). Il existe ainsi deux positions de M convenables.

De même, la distance de L à (EF) étant égale à 3, la sphère de centre L et de rayon 5 (de diamètre $[HG]$) coupe (EF) en deux points, tous deux situés sur le segment $[EF]$ puisque E et F sont clairement extérieurs à cette sphère. Il existe ainsi deux positions de M convenables pour la deuxième question.

Il serait possible dans un second temps de déterminer ces points à l'aide de la géométrie analytique en cherchant pour quelles valeurs de l'abscisse x de M on a, respectivement, $KM=5$ puis $LM=5$.