ESD2017_11. Conjecture et démonstration

1. Le sujet

A. Exercice

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$ avec $u_0 = 0$.

La suite (u_n) est-elle convergente ?

B. Les démarches de deux élèves de terminale scientifique

Élève 1

À l'aide d'un tableur, j'ai construit cette feuille de calcul.
Je conjecture que la suite (u_n) est croissante et converge vers 1.

Je montre que la suite est croissante :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2-u_n} - u_n = \frac{1-2u_n+u_n^2}{2-u_n}$$

Je ne sais pas comment conclure.

	A	B
1	n	u_n
2	0	0,000
3	1	0,500
4	2	0,667
5	3	0,750
6	4	0,800
7	5	0,833
…	…	…
102	100	0,990
…	…	…
1 002	1000	0,999

Élève 2

J'ai calculé les premiers termes de la suite : $u_0 = 0$; $u_1 = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = \dfrac{2}{3}$; $u_3 = \dfrac{3}{4}$

J'en déduis que $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ *et donc que la suite (u_n) converge vers 1 car* $u_{10000} = \dfrac{10000}{10001} \approx 1$

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Précisez l'aide que vous pourriez leur apporter pour mener à bien leur démarche.

2. Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique en ayant recours à l'outil logiciel.

3. Proposez deux exercices sur le thème conjecture et démonstration, l'un au niveau collège, l'autre au niveau lycée. Vous motiverez vos choix en précisant les objectifs visés par chacun d'eux.

2. Eléments de correction

L'exercice d'aujourd'hui est à rapprocher de l'exercice ESD2017_01. Il s'agit d'étudier une suite récurrente définie par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant dans le cas présent la fonction, que l'on peut supposer être définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, par : $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$.

Contrairement à ESD2017_01, l'enseignant de cette classe a posé une question pertinente, s'intéresser à la convergence éventuelle de cette suite.

L'image par la fonction f de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ étant $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$, l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ est un intervalle stable par f, intervalle dans lequel f admet un unique point fixe, $f(1)=1$. La fonction f étant dérivable sur cet intervalle et vérifiant : $f'(1)=1$, on peut prévoir une convergence lente de la suite (u_n) vers 1.

1. Analyse des travaux d'élèves.

Bougnègue	*Elève 2*
Tous deux calculent les premiers termes de la suite :	
Un grand nombre de termes à l'aide d'un tableur en mode approché	Les quatre premiers termes probablement à la main
Le tableur étant réglé en mode approché, il n'est pas possible de repérer des régularités d'écriture. En revanche, Bougnègue conjecture des propriétés de croissance et de convergence	Assez de termes pour conjecturer la relation explicite : $u_n = \dfrac{n}{n+1}$
Bougnègue est parfaitement conscient du statut de son affirmation, il s'agit d'une *conjecture* qu'il s'emploie à démontrer	Cet élève confond conjecture et démonstration. Selon lui « ce que l'on constate sur les premiers termes a valeur de loi générale »
Sa démonstration échoue en raison de carences au niveau algébrique (non reconnaissance du développement d'un carré)	La confusion perdure puisqu'il utilise un exemple pour « justifier » la convergence vers 1 (selon lui, « il suffit d'exhiber un terme très voisin de la limite pour justifier cette limite »
L'aide à apporter est uniquement sur le plan algébrique. Peut être simplement faire écrire $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^{\,2} - 2u_n + 1}{2-u_n}$ serait déclencheur de la reconnaissance du développement d'un carré. On peut aussi lui proposer de s'intéresser aux propriétés de la fonction f et à leurs conséquences sur la suite.	Cet élève doit prendre conscience que des exemples, aussi nombreux soient-ils, n'ont aucune valeur de preuve. (Un autre jour, il faudra notamment lui proposer, ainsi qu'à toute la classe, un exercice dans lequel une propriété vraie pour les premiers entiers n'est plus vraie ensuite). D'autre part, cet élève doit prendre conscience que le symbole $\approx$ n'a aucune valeur mathématique. Cet élève doit être renvoyé à la signification de « limite d'une suite ».

La production de Bougnègue est mieux réussie que celle de son collègue puisqu'il fait clairement la distinction entre la part de conjecture et la part de démonstration. En revanche, une réussite de l'élève 2 est de conjecturer une formule explicite pour u_n.

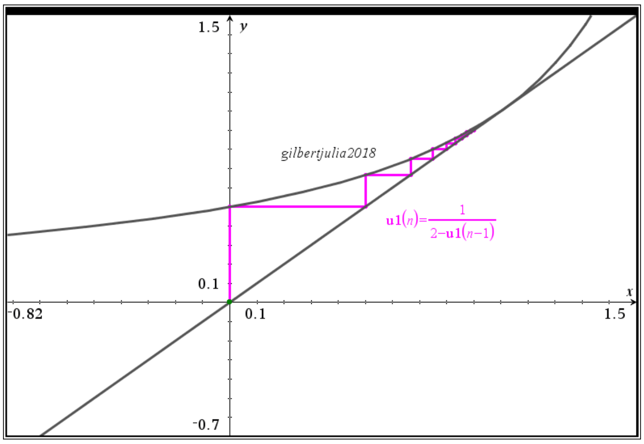
2. Correction de l'exercice.

S'appuyer sur la production de Bougnègue ne règle pas la question immédiatement. On attend de lui la relation : $u_{n+1}-u_n \underset{gjulia2018}{=} \dfrac{(u_n-1)^2}{2-u_n}$, mais on ne connaît pas le signe de $2-u_n$ qu'il faut justifier …

Il est peut être préférable d'étudier les variations de *f* sur $[0\,;1]$, comme indiqué en début de correction. Cette fonction est croissante et le réel 1 en est l'unique point fixe. Il s'ensuit que la propriété P_n : « $u_n<u_{n+1}<1$ » est héréditaire car f étant croissante conserve l'ordre : $(u_n<u_{n+1}<1)\Rightarrow\left(f(u_n)<f(u_{n+1})<f(1)=1\right)$ c'est-à-dire : $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Or, cette propriété est initialisée, P_0 est vraie puisque $\underset{gj2018}{}\; u_0=0<u_1=\dfrac{1}{2}<1$.

P_n est vraie pour tout entier *n*, la suite (u_n) est une suite croissante et majorée par 1. Une suite de nombres réels croissante et majorée est convergente. Cette suite admet donc une limite, nécessairement inférieure ou égale à 1.

Une telle suite ne peut converger que vers un point fixe de *f*. La suite converge vers 1.



Une représentation graphique de la suite (u_n) en mode Toile illustre son comportement.

Concernant la fonction $\underset{gjulia}{}\; x \xrightarrow{f} f(x)=\dfrac{1}{2-x}$ on peut remarquer (et démontrer algébriquement) que, quel que soit x appartenant à $[0\,;1]$, $x\le f(x)\le 1$, les égalités n'ayant lieu que si $x=1$. C'est cette propriété de *f* qui induit la croissance de la suite.

L'élève 2 a émis une conjecture intéressante que l'on peut reprendre à son compte.

Un tableur en mode exact montre que la relation $u_n=\dfrac{n}{n+1}$ est vérifiée au moins pour les douze premiers termes.

	A suiteun	B
◆		
1	0	gilbertjulia2018
2	1/2	
3	2/3	
4	3/4	
5	4/5	
6	5/6	
7	6/7	
8	7/8	
9	8/9	
10	9/10	
11	10/11	
12	11/12	
13		

Est-ce que pour autant cette relation est *démontrée* ?

Non, il s'agit de prouver que cette expression est universelle par une démonstration par récurrence. Cette fois, on considère la propriété P_n : « $u_n=\dfrac{n}{n+1}$ », abondamment initialisée pour les douze premiers entiers.

Cette propriété est-elle héréditaire ? On suppose que, à un certain rang *n* : $u_n=\dfrac{n}{n+1}$. Alors, le calcul du terme suivant donne : $u_{n+1}=\dfrac{1}{2-u_n} \underset{gilbertjulia2018}{=} \dfrac{1}{2-\dfrac{n}{n+1}}=\dfrac{n+1}{n+2}$, ainsi : $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, cette propriété est héréditaire.

P_n est donc vraie pour tout entier naturel *n*.

Question limite, on fait remarquer que l'expression $u_n = \frac{n}{n+1}$ conduit à une indétermination, mais en « mettant en facteur le terme prépondérant » : $u_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ On applique les théorèmes usuels sur les limites.

3. Commentaire

Voici un sujet de CAPES dans la lignée de ESD2017_16 :

- Exercice court, pertinent et peu chronophage.
- Les deux travaux d'élèves sont certes succincts mais cependant assez riches pour nourrir une analyse et servir l'un comme l'autre de tremplin à une correction.
- Le sujet, dans son ensemble, laisse aux candidats toute liberté de point de vue.

Ces qualités, qui par souci d'équité devraient être celles de ***tous*** les sujets proposés dans une même session, méritent d'être soulignées et distinguées.