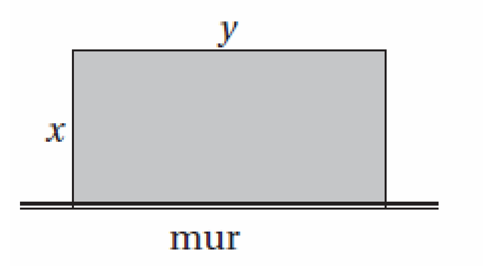
ESD2017_09. Optimisation

1. Le sujet

Exercice

Pour respecter une densité maximale labellisée de 6 poules au m^2, un éleveur construit avec du grillage un enclos rectangulaire d'aire 1250 m^2.
Ce terrain est limité par un mur sur lequel il n'y a pas de grillage.
On désigne par *x* et *y* les dimensions de l'enclos.
Déterminer les dimensions *x* et *y* de l'enclos pour que la longueur du grillage utilisé soit minimale.



Les démarches de trois élèves de seconde

Élève 1
1250 n'est pas divisible par 6. L'éleveur doit choisir un enclos de 1248 m^2 ou de 1254 m^2.

La figure optimale pour un rectangle est un carré donc la longueur du grillage utilisé est minimale lorsque l'on a $x = y = \sqrt{1248}$ *ou lorsque l'on a* $x = y = \sqrt{1254}$

Élève 2
J'ai trouvé que la longueur du grillage utilisé en fonction de x est $2x + \dfrac{1250}{x}$
En traçant à la calculatrice la courbe de cette fonction, j'ai vu qu'elle était décroissante avant x = 25 et croissante après x = 25. Donc la longueur est minimale pour x = 25.

Élève 3

J'ai essayé avec un tableur.

La longueur de grillage est minimale lorsque x = 25 et y = 50.

	A	B	C
1	x	$y = 1250/x$	$2x + y$
2	20	62,5	102,5
3	21	59,524	101,524
4	22	56,818	100,818
5	23	54,348	100,348
6	24	52,083	100,083
7	25	50	100
8	26	48,077	100,077
9	27	46,296	100,296
10	28	44,643	100,643

Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les démarches de chaque élève en mettant en évidence leurs réussites et l'accompagnement que vous pourriez leur proposer pour les aider à progresser.

2. Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3. Proposez deux exercices sur le thème *optimisation* au niveau lycée. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

2. Eléments de correction

Le problème de l'enclos à trois côtés se retrouve dans nombre de bons manuels. C'est une variante de la minimisation du périmètre d'un rectangle d'aire constante, d'ailleurs évoquée par l'élève 1. Le voici proposé à une classe de seconde.

On note une donnée inutile qui oppose quelques difficultés à l'élève 1.

L'énoncé aiguille vers une piste de résolution en attribuant les lettres x et y comme désignation des dimensions de l'enclos, favorisant ainsi la modélisation par une fonction. Il reste aux élèves à exprimer un des deux paramètres en fonction de l'autre et à modéliser la situation à l'aide d'une fonction. Au niveau seconde, les élèves ne disposent pas des outils experts pour mener à bien l'étude de la fonction obtenue. Se diriger vers une étude graphique ou vers une tabulation est donc attendu à ce niveau de classe.

1. Analyse des travaux d'élèves

Elève 1

Cet élève cherche à caser exactement 6 poules par m^2. Il est possible que, selon lui, par contrat didactique, « dans un énoncé il n'y a pas de donnée inutile » ; il a transformé l'énoncé (« densité exacte » au lieu de « densité maximale ») de façon à pouvoir utiliser pertinemment cette donnée. Il a cru ensuite reconnaître une situation de référence (un carré réalise la minimisation du périmètre d'un rectangle d'aire donnée), ce qui l'a affranchi de toute analyse mathématique plus approfondie (il ne s'engage dans aucune démarche).

C'est la compréhension de la situation, et de la consigne qui l'accompagne, qui pose problème pour cet élève. Il faudrait que cet élève relise l'énoncé, en relevant ou soulignant les hypothèses qu'il a utilisées. Il doit se rendre compte d'une part « qu'il peut y avoir moins de poules » et surtout d'autre part qu'il ne s'agit pas de minimiser le périmètre d'un rectangle, mais la somme des longueurs de trois côtés seulement.

L'enseignant peut aussi lui demander d'expliciter à 0,1 m près la longueur de la clôture lorsque $x=\sqrt{1254}$.

L'enseignant se rendrait compte si cet élève calcule le périmètre du rectangle (l'élève n'aurait pas compris la consigne) ou seulement trois côtés (l'élève aurait passé outre pour que le problème « ressemble » à ce qu'il connaît). Il trouverait 106,2 alors que les deux autres élèves trouvent mieux.

L'enseignant peut aussi prendre un autre parti. Faire reconnaître à cet élève que la situation ne correspond pas à la situation de référence qu'il évoque. « On est bien d'accord, il ne s'agit pas de minimiser le périmètre d'un rectangle, mais ton idée est intéressante. Trouve un moyen pour t'y ramener ! »

Elève 2.

Cet élève a su modéliser la situation par la fonction attendue. Il utilise un dessin de la courbe représentative de la fonction sur un écran de calculatrice en question pour conclure. Un tel dessin ne tient pas lieu de preuve :

« *Il s'agit … d'apprendre aux élèves à distinguer la courbe représentative d'une fonction des dessins obtenus avec un traceur de courbe ... Autrement dit, il s'agit de faire comprendre que des dessins peuvent suffire pour répondre de façon satisfaisante à un problème concret mais qu'ils ne suffisent pas à démontrer des propriétés de la fonction* » d'après les directives du programme.

On ne peut qu'inciter cet élève à apporter une *preuve* de sa conjecture (voir correction).

Bougnègue

Bougnègue utilise son tableur pour proposer une tabulation de la longueur du grillage. Il obtient la réponse exacte, celle-ci figurant dans sa tabulation. Le tableur met en évidence qu'une variation de 1 mètre sur la valeur de x n'induit qu'une variation de quelques centimètres sur la longueur de la clôture. Dés lors, à quoi bon chipoter, sa réponse est-elle recevable ?

On note un emploi à bon escient des paramètres x et y suggérés par l'énoncé puisqu'il exprime correctement y en fonction de x.

L'utilisation du tableur affranchit Bougnègue de toute justification de sa réponse. Il faudrait l'inciter à chercher une explication.

2. Une correction de l'exercice

On reprend les travaux de l'élève 2 et de Bougnègue. Il est intéressant de confronter les deux points de vue.

Tous deux s'accordent pour dire, explicitement (élève 2) ou implicitement (Bougnègue), que la longueur du grillage est donnée par la fonction de x définie pour $x > 0$ par $f(x) =$ gjulia2018 $2x + \dfrac{1250}{x} = \dfrac{2x^2 + 1250}{x}$.
On peut *représenter graphiquement* cette fonction ; on peut aussi la *tabuler*.

Il semble bien que cette longueur est minimale lorsque $x = 25$ mais pourtant rien ne le prouve formellement.

Peut-on le *démontrer* ?

Pour cela, il est utile de calculer $f(x) - f(25)$ et d'essayer d'en étudier le signe. La reconnaissance d'un développement de carré amène à : $f(x) - f(25) = \dfrac{2(x-25)^2}{x}$, le facteur $(x-25)$ figure dans l'expression obtenue élevé au carré. Ainsi, cette différence est toujours positive ou nulle et elle est nulle uniquement pour $x = 25$, ce qui est une justification algébrique de la conjecture.

En conclusion, les dimensions optimales sont : $x = 25$; gilbertjulia2018 $y = 50$, la largeur de l'enclos est égale à la moitié de la longueur. Il faut 100 mètres de grillage.

En trace écrite, on reprend :

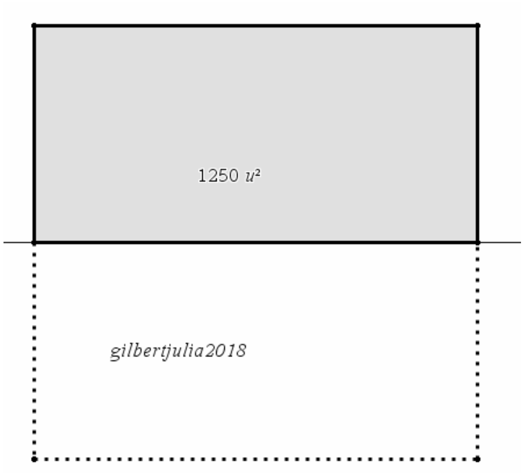
- La modélisation par une fonction : on choisit un paramètre pour décrire la situation (il prend le statut de variable, on en détermine le domaine de validité) puis on exprime les grandeurs utiles en fonction de cette variable.
- Le fait que l'on *conjecture* soit par une tabulation soit à l'aide d'une représentation graphique que le minimum est obtenu pour $x = 25$.
- La méthode de justification : lorsqu'on veut vérifier qu'une fonction f admet un minimum pour une valeur a de son ensemble de définition, on peut exprimer la différence $f(x) - f(a)$ et tenter d'en étudier le signe. Pour cela on peut essayer de factoriser autant que possible par $(x-a)$. Si cette différence est toujours positive ou nulle, alors f admet un minimum en a.
- La conclusion

Enfin, on peut se tourner vers l'élève 1 qui a cru reconnaître une situation de référence. Peut-on s'y ramener ?

On remarque que l'enclos optimal est un demi-carré.

On considère le symétrique de l'enclos par rapport au mur (de l'autre côté du mur il y a un autre éleveur de poules qui veut faire exactement la même chose).

Minimiser la longueur de grillage d'un enclos équivaut à minimiser le périmètre des deux enclos symétriques, c'est-à-dire le périmètre d'un rectangle. On retrouve la situation de référence évoquée par l'élève 1.



3. Commentaire

Le choix de 1250 pour aire de l'enclos amène à une valeur de x optimale entière. L'inconvénient est qu'à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, on « devine » sans trop de peine la valeur optimale.

Cela se justifie ici, au moins dans un premier temps, au niveau d'une classe de seconde. Le parti pris est que les élèves puissent conjecturer facilement cette valeur et l'intérêt est d'en apporter une preuve algébrique en factorisant par $(x-25)^2$ dans $f(x)-f(25)$ tout en évitant des difficultés calculatoires inutiles.

Rien n'empêche de changer ensuite la valeur de l'aire (par exemple 1000 au lieu de 1250) pour mettre en défaut calculatrice et tableur. On obtiendra certes une valeur approchée de la valeur optimale mais, histoire quand même de chipoter pour quelques centimètres, on proposera de rechercher la valeur exacte, comme on l'a fait pour 1250. La solution algébrique du problème s'en trouvera favorisée. Encore faudra-t-il conjecturer quelles adaptations algébriques il faut faire avec cette nouvelle valeur. La « situation de référence » de l'élève 1, une fois corrigée, aiderait à cette conjecture.

Une généralisation peur s'envisager plus probablement en première S : si on désigne par a l'aire de l'enclos, alors : $f(x)=2x+\frac{a}{x}=\frac{2x^2+a}{x}$ est la longueur du grillage, minimale pour $x=\sqrt{\frac{a}{2}}$, la factorisation de $f(x)-f\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right)$ par exemple en apportant une preuve algébrique.