ESD2017_08. Optimisation

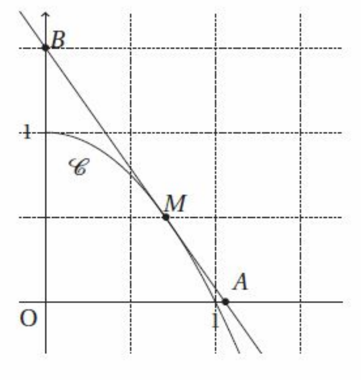
Mille pompons ! s'écria Fantômette

1. Le sujet

A. Exercice

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par :
$f(x)=1-x^2$.
On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\ \vec{i},\ \vec{j})$.
La tangente à la courbe Γ au point M de coordonnées $(a\ ;\ f(a))$, avec $0<a\leq 1$, coupe l'axe (Ox) en A et l'axe (Oy) en B.

Existe-t-il une position du point M sur la courbe Γ rendant l'aire du triangle MBO maximale ?



B. Les démarches de trois élèves de première scientifique

Élève 1
Dans un logiciel de géométrie dynamique, j'ai tracé la courbe représentative de la fonction f. J'ai créé un curseur de 0 à 1 puis placé le point M de coordonnées $(a\ ;\ f(a))$
J'ai ensuite tracé la tangente en M puis créé le triangle OBM.
En faisant varier le curseur je constate que l'aire du triangle est maximale lorsque M est en A.

Élève 2
L'aire d'un triangle est égale à la moitié de la base multipliée par la hauteur.
Dans le triangle MBO, la hauteur associée à la base OB est maximale lorsque M a pour abscisse 1.
L'aire du triangle OBM est donc maximale pour $a=1$ *et vaut alors* $\frac{1}{2}\times 1\times 1{,}5=0{,}75$

Élève 3
L'équation de la tangente au point d'abscisse a est donnée par $y=f'(a)(x-a)+f(a)$
On a $f(a)=1-a^2$ *et* $f'(a)=-2a$ *ce qui donne* $y=-2a\,x^2+2a^2$.
Pour $a=1$ *, on obtient* $y=-2x+2$ *. Le point B a donc pour ordonnée 2.*
Le triangle MBO a pour aire $\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$ *, ce qui représente son aire maximale.*

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez la production de chacun de ces élèves en précisant les compétences mises en jeu et en indiquant comment vous pourriez les aider à corriger leurs erreurs éventuelles.

2. Proposez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.

3. Présentez deux exercices sur le thème optimisation. Vous prendrez soin de motiver vos choix.

2. Eléments de correction

Chacun aura reconnu dans l'exercice-jury le sujet de mathématiques de la session 1993 du CAP de pizzaïolo[1].

1. Analyse des travaux d'élèves

Chouquerouste.
Chouquerouste a élaboré une simulation géométrique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel. Cette fois, il nous explique comment il a fait (il a donc en outre su « communiquer » sur ce point particulier, le bougre). Son programme de construction de figure dynamique est en effet correct.

Toutefois, il n'y a dans sa production aucune traduction mathématique de la situation. Sa réponse est un « constat », c'est-à-dire qu'elle se place au niveau de la conjecture. De plus, cette réponse n'est pas recevable en l'état.

Il faudrait en effet lui faire préciser ce qu'il entend par « lorsque M est en A ». Est-ce que pour lui le point A est le point fixe de coordonnées $(1\ ;\ 0)$ et dans ce cas sa conjecture est correcte ? Est-ce que (plus probable) A est le point d'intersection de la tangente avec l'axe Ox, mais dans ce cas A est un point mobile et sa réponse est irrecevable ? (Il n'aurait donc pas su « communiquer » sur ce coup-là)
On ne peut que l'inciter à préciser sa conjecture, et lui proposer d'exprimer puis d'étudier l'aire du triangle en fonction de l'abscisse de M (c'est-à-dire adopter une démarche mathématique).

Pour ma part, Chouquerouste, incapable de discerner que le jeu n'en valait pas la chandelle, ne fait preuve d'aucune compétence en mettant en branle son logiciel de géométrie pour finalement « constater » sans rien démontrer.

Elève 2.
Selon cet élève « pour maximiser l'aire d'un triangle, on maximise sa hauteur ». Il a sans doute perçu que l'abscisse de M représente, lorsqu'elle est positive, la hauteur du triangle. Il faut donc la choisir la plus grande possible.
Son erreur est de ne pas prendre en compte la longueur de la base. Sans doute pense-t-il que le point B est fixe et que $OB = 1{,}5$ est une donnée. Cette erreur est induite par la figure qui accompagne l'énoncé où l'enseignant, décidément bien peu inspiré, a fait le choix calamiteux d'une tangente passant par un point remarquable du maillage. De ce fait, la réponse de cet élève n'est pas recevable, mais la responsabilité pleine et entière en incombe à l'enseignant.

Il faudrait lui (à l'élève, mais peut-être aussi à l'enseignant qui a posé l'exercice …) faire remarquer que l'aire d'un triangle est, comme il le dit lui-même, une grandeur produit, « la moitié de la base multipliée par la hauteur », il faut donc prendre en compte la base. La figure dynamique de Chouquerouste pourrait au moins lui montrer que lorsque M se déplace, B aussi, la longueur de la base varie, ce n'est pas toujours 1,5.
Pour des compétences, utiliser une langue en bois de rose ramené de Formose.

Elève 3.
Cet élève en revanche fait preuve de compétences avérées. Il a su « traduire en langage mathématique une situation réelle à l'aide d'une fonction ». On note qu'il a pris judicieusement la décision de noter par une autre lettre que x l'abscisse de M pour éviter un télescopage de notations lorsqu'il écrit une équation de la tangente.
Il ne prend pas la peine de justifier la maximisation en A. Visiblement, la réponse lui paraît évidente (on ne saurait lui donner tort).

[1] Que la corporation des pizzaïolos, profession éminemment respectable, me pardonne.

Il a su d'autre part « développer une argumentation mathématique écrite », puisqu'il détaille convenablement les différentes étapes de son calcul. gjulia

Il commet une erreur dans l'équation de la tangente. L'équation qu'il propose est l'équation $y = f'(a)(x-a)$ mais il ne peut s'apercevoir gj de son erreur car, pour $a=1$, cette équation coïncide avec l'équation correcte.

On peut lui proposer d'expliciter l'aire du triangle *OBM* en fonction de *a* et de confronter son résultat avec celui donné par la figure dynamique de Chouquerouste (on fait afficher l'aire de *OBM*). Pour $a=1$, le résultat est le même mais pour d'autres valeurs, non. Ou simplement lui demander de vérifier si, pour $a=0$ par exemple, l'équation de sa tangente est ou non correcte.

En résumé, l'enseignant (que l'on espère purement fictif …) a choisi pour illustrer le thème « optimisation » dans sa classe un exercice sans intérêt qu'il n'a même pas su présenter correctement à ses élèves. S'il ne prévoit aucun prolongement, les élèves de sa classe n'apprendront rien aujourd'hui.

2. Une correction de l'exercice.

Elle ne présente aucun intérêt si elle est utilisée seule.

On reprend le travail de l'élève 3 en corrigeant au passage l'équation de la tangente, c'est $y=-2ax+a^2+1$.

Le point *B* a donc pour ordonnée gjulia2018 a^2+1. Lorsque $0<a\leq 1$, la longueur de la base du triangle *OBM* est a^2+1 et sa hauteur est égale à *a*. Base et hauteur sont deux fonctions de *a* positives et strictement croissantes sur $]0\,;1]$, donc leur demi-produit est une fonction strictement croissante sur $]0\,;1]$. L'aire est maximale quand $a=1$ et cette aire est égale à 1. Voilivoilou bêtibêta.

3. Commentaires

3.1. Voici un problème d'optimisation catégorie Polichinelle.

La mauvaise qualité manifeste de certains des exercices-jury de cette session 2017 m'interpelle. Bizarrement (ou pas …), ce sont uniquement des sujets dans lesquels il est question dans l'exercice-jury de « compétences » qui sont dans le collimateur. Celui d'aujourd'hui est particulièrement consternant par la pauvreté crasse de son contenu. Je peux comprendre le désarroi des candidats quand on exige d'eux des exercices complémentaires de bon niveau, alors même qu'on leur a proposé l'analyse d'un exercice d'une niaiserie exemplaire. Leur statut de candidat inhibe naturellement une critique trop acerbe, qu'ils ne peuvent se permettre de leur propre chef.

Trois sauces en effet me paraissent *a priori* possibles pour accommoder cette insipide pâte à pizza :

- Dézinguer l'exercice façon kalachnikov. C'est objectivement ce qu'il mérite. Option réaliste mais risquée.
- Encenser l'exercice façon tartufe et pipeau : « l'exercice va amener l'élève à chercher ❀, analyser le problème 🕊, observer et s'engager dans une démarche ♬, expérimenter en utilisant éventuellement des outils logiciels ❀; puis l'exercice amènera à modéliser ❀, traduire en langage mathématique une situation réelle à l'aide d'une fonction. Après avoir exercé son intelligence de calcul sur la situation proposée ♬, l'élève devra communiquer ses résultats 🕊. L'exercice permet ainsi la mise en œuvre de nombreuses compétences ♬ ♬ ». Difficile de tenir un tel discours sans se dessouder les côtes. Et peu probable qu'une commission de jury apprécie une telle prestation.
- Adopter une attitude médiane de critique feutrée : « l'exercice amène à un cas d'optimisation où cependant le recours à la variation d'une fonction n'est pas utile. S'intéresser au triangle *OAB* semble être une autre option intéressante ». Quitte à étaler un peu plus de sauce si on sent que le jury est attentif à cette critique et l'accueille favorablement.

Je n'ai malheureusement pas d'information sur les attentes des jurys actuels lorsqu'un tel exercice est en jeu. Faut-il coûte que coûte trouver des « développements de compétences » et des « objectifs d'apprentissage » là où il n'y en a pas ? Je n'ai pas la réponse. On peut cependant conjecturer que les commissions du jury 2017 ont, ce jour 08 du CAPES, « subi » malgré eux l'incroyable médiocrité de l'exercice proposé à la sagacité des candidats.

3.2. Dans cette même situation, ce n'est pas l'aire du triangle *OBM* qui a un certain intérêt, mais celle du triangle *OBA* et l'on cherche à la minimiser.

Le point *B* a pour ordonnée a^2+1 et le point *A* a pour abscisse $\frac{a^2+1}{2a}$. De ce fait, l'aire du triangle *OBA* est égale à $\frac{(a^2+1)^2}{4a}$; elle est minimale lorsque $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$ et elle vaut dans ce cas $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

Avec cet énoncé remanié, je ne sais si les élèves vont « mobiliser des compétences », mais au moins ils apprendront quelque chose et conforteront une méthode sur une situation qui a du sens.

Un scénario pour cette situation :

- Laisser faire une figure dynamique à Chouquerouste (sinon à toute la classe), affichage de l'aire de *OAB*, évolution de cette aire lorsque le curseur est actionné (on utilise cette fois le logiciel en début d'étude).
- Conjecturer qu'en effet il existe une position de *M* pour laquelle l'aire de *OAB* est minimale ($x_M \approx 0{,}58$ selon toute apparence). Mais la réponse $x_M \approx 0{,}58$ n'est pas mathématiquement satisfaisante, on voudrait connaître la position exacte, comment s'y prendre ?
- Enclencher alors le protocole classique de modélisation par une fonction.

Enfin, on peut proposer avec profit une étude *des deux* triangles. Dans un cas, il n'y a pas lieu de modéliser par une fonction car base et hauteur varient dans le même sens. Dans l'autre, les variations sont de sens différents, la réponse n'est pas immédiate, une étude fonctionnelle se justifie.

Cet exercice aurait incontestablement une bien meilleure gueule. Il illustrerait alors les différents endroits où l'on peut rechercher un extremum d'une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a\ ;b]$, conclusion qui serait reprise dans une synthèse de l'exercice :

- Ou bien en une des deux extrémités *a* ou *b* de l'intervalle (ce qui est notamment le cas lorsque cette fonction est monotone).
- Ou bien en un point, intérieur à l'intervalle, où elle change de sens de variation (ce qui amène à s'intéresser, si cette fonction est dérivable, aux changements de signe éventuels de sa dérivée).

3.3. Je ne prétends pas qu'il faut proscrire d'une séquence ce genre d'exercice. Celui-ci pourrait s'inscrire dans une batterie de *plusieurs* exercices portant sur le thème « Optimisation » en tant que « faire-valoir » d'autres situations qui sont, quant à elles, significatives.

Dans le présent contexte, il n'est pas nécessaire de mener une étude très poussée pour conclure. Dans d'autres cas au contraire, une telle étude sera indispensable. La « compétence » visée, si compétence il y a, sera précisément de savoir faire le tri entre une situation où l'on peut conclure facilement, comme ici, et une autre nécessitant une étude plus attentive et approfondie. Et d'adapter les moyens de résolution en conséquence.

En revanche, ce que j'affirme avec force, c'est qu'un exercice-jury aussi débile n'a pas sa place dans un sujet de CAPES. Un minimum d'honnêteté vis-à-vis des candidats aurait été de poser une question claire et franche sur la pertinence de l'exercice, suscitant de leur part une analyse critique. Il est scandaleux que ce ne soit pas le cas.