ESD 20163c –04 : Différents types de raisonnement

1. Le sujet

A. L’exercice proposé au candidat

On considère la suite définie pour tout n appartenant à **N** par : $u_{n+1} = 4u_n - 3$ avec $u_0 = 6$

1. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier :

(a) Pour tout entier naturel n, $\frac{u_n}{3}$ est un nombre premier.

(b) Pour tout entier naturel n, $u_n = 5 \times 4^n + 1$

(c) u_n est impair si et seulement si n est différent de 0.

2. Déterminer la plus petite valeur de l’entier naturel n tel que u_n soit supérieur à 10^6.

B. Extrait du programme de l’enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques de la classe terminale de la série scientifique

Notations et raisonnement mathématiques :

En complément des objectifs rappelés ci-dessous, le travail sur la notion d’équivalence doit naturellement être poursuivi (propriété caractéristique, raisonnement par équivalence) et l’on introduit le raisonnement par récurrence.

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples :

— à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;

— à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles ∃, ∀ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;

— à distinguer, dans le cas d’une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;

— à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;

— à formuler la négation d’une proposition ;

— à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;

— à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l’absurde

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Expliquez en quoi cet exercice répond aux recommandations du paragraphe « Notations et raisonnement mathématiques » inséré dans le programme de la classe de terminale scientifique.

2. Présentez une correction de cet exercice telle que vous l’exposeriez devant une classe de terminale S en mettant en valeur les différents types de raisonnement utilisés.

3. Proposez deux exercices, un au niveau lycée et un au niveau collège, sur le thème « *différents types de raisonnement* ». Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

2. Eléments de correction

Cet exercice propose l'étude de quelques propriétés d'une suite arithmético-géométrique dont tous les termes sont des entiers. L'enseignant exploite cette situation à la frontière entre « suites numériques » et « arithmétique » pour entraîner les élèves à la pratique du raisonnement.

1. Difficile de dire « en quoi cet exercice répond aux recommandations » officielles. Cela dépend à 99 % de ce qu'en fait concrètement l'enseignant …

Le choix de l'étude d'une suite d'entiers est délibéré : cette situation pourrait éventuellement se prêter à l'introduction du raisonnement par récurrence. Mais en même temps, les questions posées vont montrer que la pratique de ce type de raisonnement est loin d'être systématique dans ce genre de circonstances. On reconnaîtra d'abord l'utilisation d'un contre exemple pour infirmer une proposition et ensuite, le choix sera relativement varié, on verra ça.
L'exercice ne couvre cependant pas l'ensemble des thèmes pointés dans les programmes officiels, rien de plus normal. L'utilisation correcte des connecteurs logiques « et », « ou » par exemple manque à l'appel.

2.
1. (a). Faux
Utilisation d'un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle.
$\frac{u_2}{3}$ n'est pas un nombre premier.

Il existe un entier naturel tel que $\frac{u_n}{3}$ n'est pas un nombre premier.

Cette question fournit l'occasion de travailler sur la façon de formuler la négation d'une proposition (notamment de s'intéresser aux quantificateurs présents dans une proposition et dans sa négation)

	B suiteun	C unsur3	D gilbertjulia2016	E	F
=	),10},{6},1)	=suiteun/3	=seq(isprime(uns	=seq(5*4^k+1,k,0,	
1	6	2	true	6	
2	21	7	true	21	
3	81	27	false	81	
4	321	107	true	321	
5	1281	427	false	1281	
6	5121	1707	false	5121	
7	20481	6827	true	20481	
8	81921	27307	false	81921	

B **suiteun**:=seqgen$(4\cdot u(n-1)-3,n,u,\{0,10\},\{6\},1)$

1. (b) Vrai.
Deux raisonnements différents peuvent être mis en œuvre.

- Un raisonnement par récurrence.
- Un raisonnement par implication directe utilisant une propriété caractéristique des suites géométriques :

On remarque que la relation de récurrence peut s'écrire : $u_{n+1}-1=4u_n-4=4(u_n-1)$
On définit alors la suite (v_n) par : $v_n=u_n-1$ pour tout entier n.
Pour tout entier naturel n : $v_{n+1}=u_{n+1}-1=$ $(4u_n-3)-1=4(u_n-1)=4v_n$.
Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 4. Son premier terme étant égal à 5, pour tout entier naturel n son terme de rang n est $v_n=5\times 4^n$ et celui de la suite (u_n) est $u_n=v_n+1=5\times 4^n+1$

(c) Vrai.
Cette question se prête à un travail avec les élèves sur les différentes propositions (négation, réciproque, contraposée) d'une proposition donnée. On vérifie que :

- Si n est strictement positif alors c'est un entier impair. En effet, u_n a un prédécesseur : $u_n=4u_{n-1}-3$ est différence d'un entier pair et d'un entier impair.
- Si $n=0$ alors u_0 est un entier pair (par hypothèse)

Peut-on conclure pour autant que « u_n est impair si et seulement si n est différent de 0 » ?

- Les propositions « $n = 0$ » et « $n > 0$ » sont les négations l'une de l'autre, de même que « u_n est pair » et « u_n est impair ». Il en est ainsi lorsqu'on considère une partition d'un ensemble en deux sous ensembles : la négation de l'appartenance à une partie est l'appartenance à l'autre partie.
- La réciproque de « si n est strictement positif alors u_n est impair » est « si u_n est impair, alors n est strictement positif ». La contraposée de « si u_n est impair, alors n est strictement positif » est : « si $n = 0$ alors u_n est pair », ce qu'on a effectivement vérifié. Pour démontrer qu'une proposition conditionnelle est vraie, on peut démontrer que sa contraposée est vraie.

On a bien démontré l'équivalence demandée.

2.

- Exhaustivité :

Recherche exhaustive du premier indice n tel que : $u_n > 10^6$, en l'occurrence l'indice 9.

De la façon dont la question est posée, il n'y a rien d'autre à faire.

Si la question était formulée ainsi :
« Déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \geq 10^6$ » il resterait à justifier que tous les termes d'indice ≥ 9 sont eux aussi $\geq 10^6$ (par un argument de croissance de la suite par exemple).

	A num	B suiteun	C unsur3	D gilbertjulia2016	E	F
=	=seq(k	=seqgen(4'	=suiteun/3	=seq(isprime(uns	=seq(5*4^k+1,k,0,	
1	0	6	2	true	6	
2	1	21	7	true	21	
3	2	81	27	false	81	
4	3	321	107	true	321	
5	4	1281	427	false	1281	
6	5	5121	1707	false	5121	
7	6	20481	6827	true	20481	
8	7	81921	27307	false	81921	
9	8	327681	109227	false	327681	
10	9	1310721	436907	false	1310721	
11	10	5242881	1747627	false	5242881	

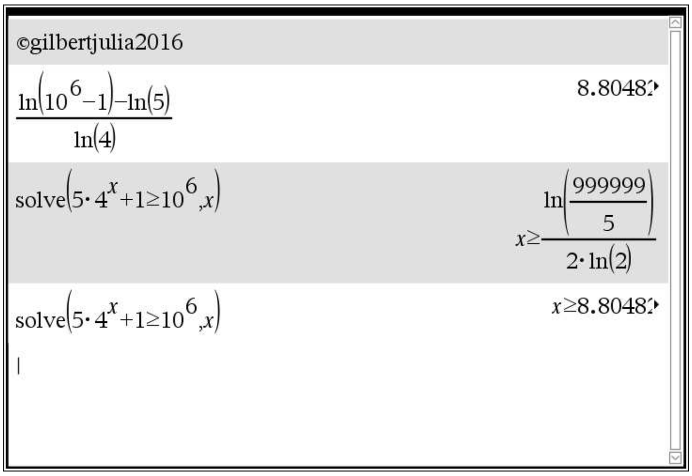
:

- Raisonnement par équivalence logique, sachant que $u_n = 5 \times 4^n + 1$ en exploitant la croissance stricte de la fonction logarithme népérien :

$$u_n \geq 10^6 \Leftrightarrow 4^n \geq \frac{10^6 - 1}{5}$$

$$u_n \geq 10^6 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(10^6 - 1\right) - \ln 5}{\ln 4}.$$

L'usage d'une calculatrice montre que $8 < \dfrac{\ln\left(10^6 - 1\right) - \ln 5}{\ln 4} < 9$ de sorte que : $u_n \geq 10^6 \Leftrightarrow n \geq 9$.



En variante de la même démarche, le solveur de la calculatrice détermine l'ensemble des solutions dans **R** de l'inéquation $5 \times 4^x + 1 \geq 10^6$ à savoir l'intervalle $\left[\dfrac{\ln\left(\dfrac{999999}{5}\right)}{2\ln 2}, +\infty\right[$. L'entier 9 est le plus petit entier appartenant à cet ensemble …

3. Voir par exemple REDCM pages 105 à 108.

Je signale cependant un document important sur le thème « types de raisonnement », et bien au-delà d'ailleurs, à lire absolument :
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/50/0/doc_acc_clg_raisonnementetdemonstration_223500.pdf
Il s'agit là d'un document de référence.

3. Commentaires

C1. Il y a lieu d'entraîner les élèves à comparer différents types de raisonnement, sans pour autant sombrer dans un jordanisme façon Molière.

Par exemple, à propos de la question 1.c : « Supposons qu'il existe un entier strictement positif n tel que u_n soit pair. Alors le nombre impair 3 vérifierait $3 = 4u_{n-1} - u_n$ et serait une différence de deux nombres pairs, ce qui est absurde » est un raisonnement recevable, mais à quoi bon mettre de l'absurde là où l'on peut s'en passer ?

La comparaison de différents raisonnements devrait amener à faire un tri : l'essentiel est bien sûr que le raisonnement soit correct. Mais il est aussi important de s'interroger sur sa simplicité et son efficacité.

Dans la résolution d'une question il est utile de sélectionner tel ou tel autre type de raisonnement en fonction de ces deux critères.

C2. (Pour aller plus loin)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- 1. Si u_n est divisible par 7, alors u_{n+3} est divisible par 7.
- 2. u_n est divisible par 7 si et seulement si $n+2$ est divisible par 3.
- 3. Si u_n est divisible par 11, alors u_{n+5} est divisible par 11.
- 4. Il existe un entier n tel que u_n est divisible par 11.

L'écran ci-contre peut être exploité pour traiter les affirmations 1 et 3

solve$(5\cdot 4^{x}+1\geq 10^{6},x)$	$x\geq 8.80482$
Define $u(n)=5\cdot 4^{n}+1$	*Terminé*
$u(n+3)-u(n)$	$315\cdot 4^{n}$
factor(315)	$3^{2}\cdot 5\cdot 7$
$u(n+5)-u(n)$	$5115\cdot 4^{n}$
©gilbertjulia2016	
factor(5115)	$3\cdot 5\cdot 11\cdot 31$

Et celui-ci peut être exploité pour traiter les affirmations 2 et 4.

Je laisse au lecteur le plaisir de terminer ☺

factor(315)	$3^{2}\cdot 5\cdot 7$
$u(n+5)-u(n)$	$5115\cdot 4^{n}$
©gilbertjulia2016	
factor(5115)	$3\cdot 5\cdot 11\cdot 31$
$\{u(0),u(1),u(2)\}$	$\{6,21,81\}$
mod$(\{u(0),u(1),u(2)\},7)$	$\{6,0,4\}$
$\{u(0),u(1),u(2),u(3),u(4)\}$	$\{6,21,81,321,1281\}$
mod$(\{u(0),u(1),u(2),u(3),u(4)\},11)$	$\{6,10,4,2,5\}$