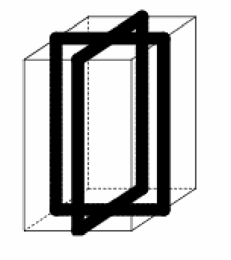
ESD 2016_3c03 : Optimisation

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat



On entoure une boîte avec un ruban de longueur 1,20m dont 20cm ont permis de réaliser le nœud. La boîte est un pavé droit à base carrée et le ruban passe par les milieux des arêtes des faces supérieure et inférieure.

Parmi toutes les boîtes que l'on peut ainsi envisager, en existe-t-il une de volume maximal ? Si oui, préciser ce volume et les dimensions de la boîte, sinon justifier.

B. Les réponses proposées par deux élèves de première

Elève 1

J'ai réalisé un tableau de valeurs avec une colonne A pour le côté du carré, une colonne B pour la hauteur et une colonne C pour le volume.

J'ai tapé :

$A2 = A1 + 0{,}1$ puis $B1 = 0{,}25 - A1$ et $C1 = A1 * A1 * B1$

et ensuite, j'ai tiré les formules vers le bas. Après, pour être plus précis, j'ai diminué plusieurs fois le pas dans la colonne A.

	A	B	C
1	0	0,25	0
2	0,1	0,15	0,0015
3	0,2	0,05	0,002
4	0,3	−0,05	−0045

Je trouve un volume maximal de 0,002314787 m^3 avec un côté du carré de 16,7 cm et une hauteur de 8,3 cm

Élève 2

En notant x le côté du carré et h la hauteur, on a un mètre de ruban avec $4x + 4h$.

$4x + 4h = 1$ donc $h = 1 - x$ et le volume est donné par $V(x) = x^2(1 - x)$

Je dérive : $V'(x) = 2x \times (-1) = -2x$

La dérivée s'annule seulement en 0 et le volume est alors égal à 0. Je ne crois pas qu'il y ait de volume maximal.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs.

2. Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première en vous appuyant sur les productions des élèves.

3. Proposez deux ou trois exercices sur le thème *optimisation*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

2. Eléments de correction

Cet exercice d'optimisation issu du domaine de la géométrie amène à l'étude d'une fonction numérique. L'enseignant peut y développer une méthode générale d'étude de ce type de problème. En même temps, cette situation contextualise une fonction du troisième degré, type de fonction qui, en classe de première, est très favorable à la mise en valeur de l'outil de la dérivation dans l'étude des variations d'une fonction.

1. Analyse des travaux d'élèves

Les deux élèves ont tous deux bien compris le problème et s'engagent dans deux démarches différentes. L'un passe au cadre numérique, l'autre au cadre fonctionnel.

	Bougnègue	**Elève 2**
Modélisation	Utilise un tableur. Exprime correctement la hauteur en fonction du côté du carré puis le volume.	Modélisation à l'aide d'une fonction. Expression du volume incorrecte car on observe une erreur de calcul dans l'expression de *h* en fonction de *x*.
Traitement mathématique	Méthode de dichotomie. On peut penser qu'après avoir utilisé le pas 0,1, il a réduit au pas 0,01 puis au pas 0,001	Outil de la dérivation. Utilise un théorème-élève incorrect : « La dérivée d'un produit est égale au produit des dérivées »
Conclusion	Obtient une valeur approchée des dimensions et du volume de la boîte optimale.	Conclusion incorrecte, cohérente cependant avec son traitement mathématique. Ne contrôle pas ses calculs, ce qui ne l'amène à aucune remise en cause.
Remédiation	Lui demander ce qu'il se passerait avec une nouvelle réduction du pas. Obtiendrait-il une valeur « définitive » ? L'aiguiller vers une modélisation à l'aide d'une fonction.	Mettre en évidence une contradiction entre la décroissante supposée de la fonction volume et le calcul de ce volume pour quelques valeurs simples. Faire développer l'expression du volume puis faire dériver. Confronter les deux expressions des dérivées.

Bougnègue a su « expérimenter en utilisant un outil logiciel », expérimentation qui l'a amené en mettre en œuvre implicitement une dichotomie et à construire une solution approchée pertinente du problème.

L'élève 2 a su proposer une modélisation à l'aide d'une fonction. Il est représentatif de la méthode que l'enseignant cherche à promouvoir. Cet exercice a probablement été posé en début d'apprentissage de la dérivation, puisque cet élève commet une erreur classique à propos de la dérivée d'un produit.

2. Correction de l'exercice.

En premier lieu, convenir d'une unité de longueur. Les deux élèves 1 et 2 choisissent le mètre. On peut les suivre. (Le centimètre paraît cependant une meilleure option).

Si on commence par exploiter le travail de l'élève 1, on prêtera d'abord attention aux cellules B4 et C4 qui contiennent des nombres strictement négatifs, incompatibles avec la situation concrète. Cela amène à dire que le côté du carré est un nombre qui est nécessairement compris entre 0 et 0,25.

On fera remarquer que la formule : $C1 = A1 * A1 * (0,25 - A1)$ exprimerait le volume en fonction du côté du carré uniquement. On y voit bien le rôle de la condition $0 \le A1 \le 0,25 - A1$.

Un pas initial de 0,05 plutôt que 0,1 paraît plus adapté, pas que l'on réduira. On insistera ensuite sur le fait que la méthode mise en œuvre est « sans fin », en ce sens qu'elle permet d'approcher la boîte idéale, mais non de la déterminer exactement. Comment obtenir cette valeur exacte ?

On considère ensuite le travail de l'élève 2 qui note « x le côté du carré et h la hauteur », introduisant ainsi pertinemment deux paramètres. On explicite la relation qui les lie, à savoir $4x+4h=1$, comme l'indique l'élève. Cette relation permet de choisir un unique paramètre permettant à lui seul de décrire la situation, soit x, soit h. Le choix de x comme le fait implicitement l'élève 2 est une bonne option.

Il est important de préciser à ce moment l'intervalle dans lequel le problème a un sens, en l'occurrence[1] l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{1}{4}\right]$.

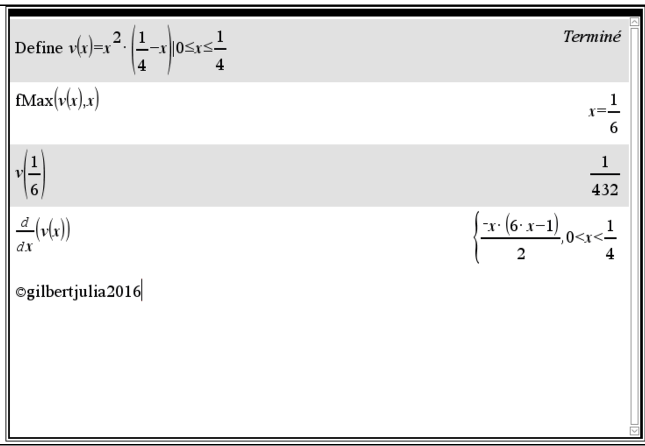
L'expression de h en fonction de x doit être corrigée : $h=\frac{1}{4}-x$

L'expression du volume aussi : $V(x)=x^2\left(\frac{1}{4}-x\right)$. Expression que l'on peut comparer à celle de l'élève 1.

On obtient une fonction du troisième degré définie sur $\left[0\ ;\ \frac{1}{4}\right]$. En remarquant que $V(0)=V\left(\frac{1}{4}\right)=0$, on peut conjecturer l'existence d'une boîte de volume maximal.
Il s'agit d'étudier les variations de cette fonction V sur $\left[0\ ;\ \frac{1}{4}\right]$, ce qui est le point central de l'exercice. Le calcul et l'étude du signe de la dérivée est incontournable.

On pourra considérer d'une part l'expression factorisée du volume : $V(x)=x^2\left(\frac{1}{4}-x\right)$ et d'autre part l'expression développée :
 $V(x)=-x^3+\frac{x^2}{4}$.
Comparer les deux calculs de dérivées et les opérations sur les dérivées qu'elles mobilisent. Il est important de revenir sur le calcul de la dérivée d'un produit.

Conclure.



En synthèse, on comparera les deux méthodes, en soulignant tout de même une plus grande efficacité de la modélisation à l'aide d'une fonction. Faire apparaître les différentes phases de la démarche.

- Choix d'un paramètre pour décrire la situation (dans un certain intervalle de définition que l'on précise).
- Calcul des grandeurs utiles et d'une fonction objectif.
- Etude des variations de la fonction objectif sur son intervalle de définition.
- Conclusion et retour au concret (on décrit en l'occurrence la boîte idéale).

On peut proposer aux élèves d'examiner ce qu'il se passerait si, au lieu de x, on prenait pour paramètre maître la hauteur h de la boîte. Ils obtiendront une autre fonction du troisième degré. Les élèves pourront contrôler eux-mêmes les résultats, la boîte idéale devant au final être la même boîte.

[1] Des élèves peuvent objecter à juste titre que pour 0 et 1/4, « la boîte n'existe pas » et qu'il faudrait considérer l'intervalle ouvert. Certains bons manuels conseillent d'ailleurs ce choix et on trouvera des intervalles ouverts dans d'autres sujets 2016. Fermer conventionnellement l'intervalle permet de se libérer d'un calcul de limite et de parler de « valeurs aux bornes ». Au lecteur de se faire son opinion.