ESD 2016_3c02 : Problèmes avec prise d'initiative

1. Le sujet

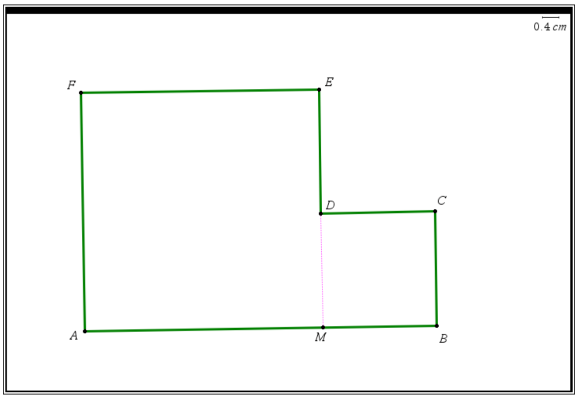
A. L'exercice proposé au candidat

On considère la figure suivante pour laquelle :

- [AB] est un segment de longueur 8 cm.
- M est un point mobile sur le segment [AB]
- $AMEF$ et $MBCD$ sont des carrés.

Pour quelles positions du point M le périmètre du polygone $ABCDEF$ est-il inférieur à 26 cm ?

(D'après Math'x seconde)



B. Les réponses proposées par trois élèves de seconde

Elève 1

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, j'ai construit la figure et j'ai affiché le périmètre du polygone. J'ai cherché à obtenir un périmètre de 26 cm et en bougeant le point M, j'obtiens $AM = 3$ *et* $AM = 5$*. Donc M doit être placé entre 3 et 5*

Elève 2

J'ai calculé le périmètre du grand carré et du petit carré pour plusieurs valeurs avec un tableur pour aller plus vite :
*En B2 : =4*A2*
En C2 : =4(8-A2)*
En D2 : =B2+C2-2(8-A2)
car il faut retirer deux fois le segment en pointillés. Il faut donc que AM soit plus petit que 5 cm mais quand je vérifie pour $AM = 0$*, je ne trouve pas 16 cm. Ma formule doit être fausse.*

	A	B	C	D
1	AM	grand carré	petit carré	polygone
2	0	0	32	16
3	1	4	28	18
4	2	8	24	20
5	3	12	20	22
6	4	16	16	24
7	5	20	12	26
8	6	24	8	28
9	7	28	4	30
10	8	32	0	32

Elève 3

Je pose $AM = x$.

$P = x + (8-x) + (8-x) + (8-x) + (x-(8-x)) + x + x = 16 + 2x$

$16 + 2x < 26$ $\qquad 2x < 10$ $\qquad x < 5$

Le point M doit être à moins de 5 cm du point A. En fait, par symétrie, il faudrait aussi que x soit plus grand que 3 cm.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez la démarche de chaque élève en mettant en évidence leurs compétences en termes de prise d'initiative et en précisant les conseils que vous pouvez apporter à chacun d'eux.

2. Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3. Proposez trois exercices sur le thème *problèmes avec prise d'initiative*, dont l'un au niveau collège, en prenant soin de motiver vos choix.

2. Eléments de correction

Voici un pseudo problème de recherche assez représentatif des mathématiques de Polichinelle qui ont tendance à s'installer durablement.

Certes, on reconnaît certaines caractéristiques spécifiques d'un problème $_{gj}$ de recherche :

- L'énoncé est posé sous forme ouverte.
- La situation proposée est facilement accessible aux élèves.
- Aucune démarche n'est guidée ni même suggérée.

Mais il s'avère que la solution du problème peut être devinée sans mettre en œuvre de gros moyens d'investigation. L'essai de quelques valeurs devrait suffire.

On peut s'interroger sur la pertinence de l'artillerie lourde déployée par les deux premiers élèves, conforme certes aux directives d'une l'Institution aux ordres des lobbies du numérique.

1. Analyse des travaux d'élèves.
Chouquerouste.
Réponse exacte mais non étayée par la moindre justification.
Aujourd'hui, Chouquerouste[1] a utilisé son logiciel de géométrie fétiche, dont il maîtrise avec talent les outils (construction de carrés, point sur objet, polygone, mesure d'un périmètre, …). Notamment, il sait rendre une figure dynamique et exploiter la déformation $_{gj}$ de la figure due à ce dynamisme.

Il a su « expérimenter en utilisant un outil logiciel ». Cette « compétence » lui a permis de repérer les positions de M sur le segment $[AB]$ pour lesquelles le périmètre du polygone est 26cm et d'observer que, pour obtenir un périmètre plus petit que 26cm, le $_{gj}$ point M devait se trouver entre les deux positions.

Cette bonne utilisation de son logiciel l'a exempté de toute réflexion mathématique. On ne peut donc relever aucune autre « compétence ».

Le conseil que l'on peut lui donner est qu'une expérimentation comme celle qu'il a mise en œuvre sert à *conjecturer*, en aucun cas à *démontrer*. Il lui reste à faire un effort de réflexion mathématique, à savoir traduire en langage mathématique la situation qu'on lui propose, de façon à pouvoir répondre à la question « *Pourquoi AM* doit-il être compris entre 3 et 5 ? »

Il n'est pas sûr que Chouquerouste soit convaincu du bien-fondé de cette exigence … Les instances ministérielles non plus (?).

Les productions des deux autres élèves peuvent éventuellement être traitées en parallèle car, si la modélisation est différente, elles présentent quelques similitudes.

---

[1] Orthographe phonétique de « Xucarostes », ce qui signifie « Suce-lard ». Dans la première moitié du XXème siècle et *a fortiori* avant, chaque famille faisait elle-même ses salaisons pour l'année, notamment le lard ou « carnsalada » dont on avait l'habitude de couper un morceau pour donner du goût à la soupe quotidienne. Mais le même lard servait pour plusieurs soupes consécutives. On en prélevait un petit morceau pour le donner à sucer au dernier-né de la famille en guise de tétine, en particulier s'il n'avait pas encore de dents (ainsi, le morceau restait à peu près intact et était lui aussi remis dans la nouvelle soupe pour resservir dès que possible). Le « Xucarostes » était donc le dernier né, celui qui était né de la dernière pluie. Le nom a été ensuite repris par un auteur de nouvelles local pour désigner un héros un peu niais récurrent dans ses nouvelles, ce qui a lui a donné une certaine notoriété.

	Bougnègue	**Elève 3**
	Réponse incorrecte	Réponse finale exacte grâce à une remise en cause pertinente de la démarche initiale
Modélisation	Utilisation d'un tableur. Formules tirées vers le bas. Tabulation de 0 à 8 avec le pas 1 des valeurs de *AM*, des valeurs correspondantes des périmètres des deux carrés et du périmètre supposé du polygone.	Modélisation à l'aide d'une fonction. Calcule le périmètre en ajoutant l'une après l'autre les longueurs supposées des côtés.
	Raisonnent exclusivement sur la figure qui accompagne l'énoncé. N'ont pas saisi qu'il y avait deux cas de figure, suivant que $AM < 4$ ou bien $AM \geq 4$. L'expression du périmètre est correcte lorsque $AM \geq 4$, elle ne l'est pas lorsque $AM < 4$.	
Traitement mathématique	Le caractère Polichinelle de l'énoncé l'a amené à obtenir par sa tabulation une des valeurs de *AM* pour laquelle le périmètre est exactement 26.	Résolution algébrique d'une inéquation, cohérente puisque $x < 5$ est la conclusion logique de sa démarche.
Attitude critique par rapport à son résultat	Effectue une vérification pertinente (qui l'amène à mettre en doute son résultat mais non pas à corriger sa démarche).	Oui, attitude critique qui l'amène à corriger sa démarche et en adopter une nouvelle (en témoigne son argument géométrique de symétrie pour justifier une deuxième condition). On peut à la rigueur parler de compétence.
Conseil	Aller observer la figure dynamique de l'élève 1 pour se rendre compte que le « grand » carré et le « petit » ne sont pas toujours les mêmes et que, peut-être, la longueur du segment en pointillés ne s'exprime pas toujours de la même façon.	Approfondir l'argument de symétrie et son impact sur l'expression en fonction de *x* des longueurs des différents segments constituant le pourtour du polygone.

2. Un scénario de correction.

On s'appuie sur les productions des élèves 2 et 3, en comparant les expressions du périmètre qu'ils ont obtenues :

Elève 2 : $4 * A2 + 4 * (8 - A2) - 2(8 - A2)$ c'est-à-dire $4 * A2 + 2 * (8 - A2)$

Elève 3 : $x + (8 - x) + (8 - x) + (8 - x) + (x - (8 - x)) + x + x$ c'est-à-dire $4x + 2(8 - x)$.

On note que l'expression du périmètre en fonction de la variable *AM* est la même dans les deux cas.
Pourtant, l'expression du périmètre n'est pas toujours satisfaisante. Pourquoi ?

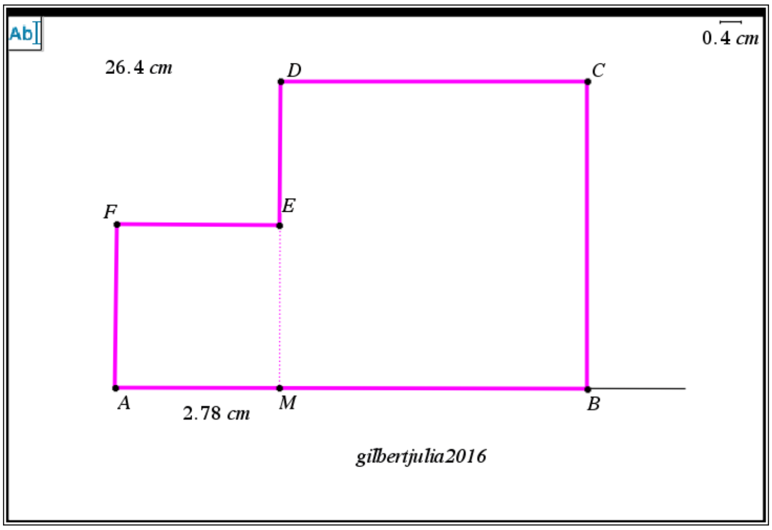
L'observation d'une figure dynamique fournit l'explication : les points M, D, E ne sont pas toujours alignés dans le même ordre.

Le « segment en pointillés » est tantôt $[MD]$ tantôt $[ME]$ et cela modifie la formule proposée par l'élève 2.

Dans la formule proposée par l'élève 3, l'expression de la longueur du segment $[DE]$ est $2x-8$ gj2016 .

Or, ce n'est pas toujours le cas. $DE=|2x-8|$ en toute généralité.

Le réel x appartient à l'intervalle $[0\ ;\ 8]$ et, quand il appartient à $[0\ ;\ 4]$, $DE=8-2x$.



Désormais, on va continuer plutôt la démarche de l'élève 3, universelle, alors que l'utilisation d'un tableur est limitée.

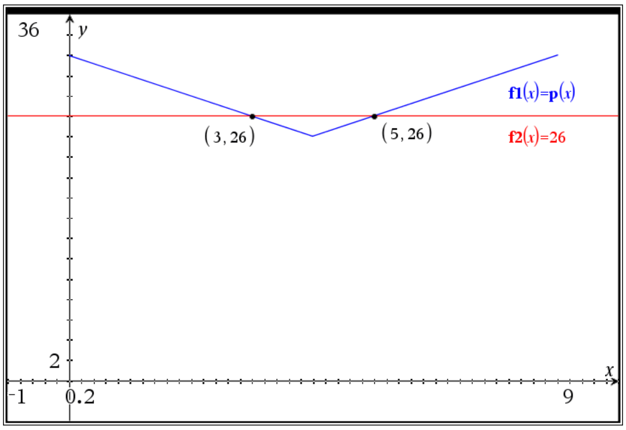
Le périmètre a ainsi pour expression :

gjulia2016 $$P(x)=\begin{cases}16+2x & si\ \ 4\le x\le 8\\ 32-2x & si\ \ 0\le x\le 4\end{cases}$$

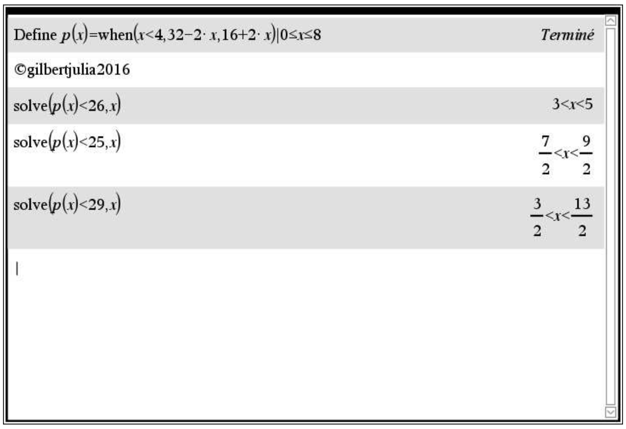
Les deux expressions proposées coïncident en 4.

Il s'agit d'une fonction continue « affine par morceaux ».

Dès lors, on peut opter pour une solution graphique comme ci-contre :



Ou bien pour une solution algébrique.



Si l'énoncé avait proposé 25 ou 29 à la place de 26, l'intervalle solution aurait été un petit peu moins facile à déterminer gj (bornes non entières).

Il n'est pas interdit de proposer une telle modification.