

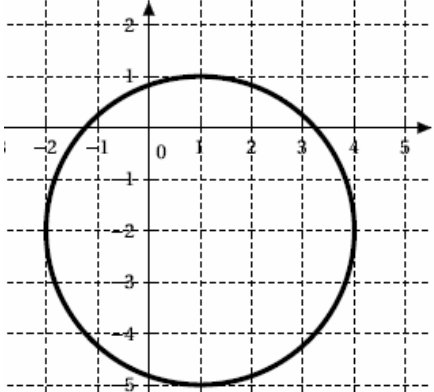
ESD 2016_18 : Problèmes avec prise d'initiative

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation : $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ (E)

B. Les réponses de deux élèves de première S

Elève 1 <i>Dans la barre de saisie du logiciel j'ai entré l'équation $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ J'ai réglé et affiché la grille avec un pas de 1 pour faire apparaître les points entiers. J'ai trouvé $x=1$; $y=1$</i>	
Elève 2 <i>J'ai écrit le programme ci-contre. Quand je l'exécute il affiche toujours (1 ; 1) ; (1 ; -5) ; (4 ; -2) ; (-2 ; -2). J'en ai déduit que ce sont les solutions de l'équation.</i>	<pre> pour i allant de -100 à 100 faire pour j allant de -100 à 100 faire si i * i + j * j - 2 * i + 4 * j - 4 = 0 alors Afficher (i, j) fin fin fin </pre>

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez la production de chacun des élèves. Vous préciserez les compétences mises en jeu et indiquerez comment vous pourriez les aider à corriger leurs erreurs éventuelles.
2. En vous appuyant sur les productions des élèves, présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première S.
3. Proposez un exercice au niveau collège et un exercice au niveau lycée sur le thème *problèmes avec prise d'initiative*. Vous prendrez soin de motiver vos choix.

2. Éléments de correction

Ce dernier sujet de la session 2016 porte sur la résolution d'une équation diophantienne du deuxième degré. L'arithmétique n'est pas au programme de première, les élèves devront mettre en œuvre des solutions personnelles sans qu'aucune méthode de résolution ne soit visée ni privilégiée.

1. Analyse des travaux d'élèves.

Chouquerouste (le frère)

Résolution artisanale incorrecte.

Aujourd'hui, frère Chouquerouste a dégainé son logiciel de représentation graphique, logiciel qui ne se contente pas de représenter graphiquement des fonctions définies par une relation explicite $y = f(x)$, mais représente aussi des courbes définies ^{gi} implicitement par une équation du deuxième degré.

Il fait aussi afficher la grille ayant pour nœuds les points de coordonnées entières relatives et visualise l'intersection entre la grille et la courbe tracée par son logiciel. Il repère une ainsi une solution.

Frère Chouquerouste a su s'engager dans une démarche et expérimenter en utilisant un outil logiciel.

Il n'a pas su faire aboutir une modélisation (il lui restait pour une modélisation aboutie à trouver un moyen d'obtenir l'intersection entre la grille et la courbe).

Pour aider frère Chouquerouste à aller au-delà d'une simple visualisation, il faudrait lui demander de caractériser géométriquement la courbe affichée par le logiciel (c'est-à-dire traduire l'équation proposée par une condition géométrique) puis de voir comment des points à coordonnées entières satisfont cette caractérisation.

Chouquerouste (la sœur)

Solution correcte à un détail près.

Sœur Chouquerouste a décidé de composer un programme recherchant exhaustivement les couples solutions dans une partie de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Son programme comportant un boucle For ... EndFor et une boucle conditionnelle est correctement construit et affiche correctement toutes les solutions.

Sœur Chouquerouste a su mettre en œuvre un algorithme pertinent.

Le « détail près » est le suivant et c'est plus qu'un « détail » : Afin d'obtenir le maximum de solutions, sœur Chouquerouste fait parcourir par son algorithme tous les couples entiers du carré ^{gjulia 2016} $[-100 ; 100] \times [-100 ; 100]$ (façon « je n'y vais pas avec le dos de la cuiller »). Elle ne règle pas la question « À l'extérieur de quel domaine suis-je certaine qu'il n'y aura plus de solution ? ». Autrement dit, rien dans son travail n'indique qu'il n'y a pas de solution à l'extérieur du domaine exploré. Elle semble tout de même avoir un doute sur la validité de sa solution. Une preuve de son incertitude est qu'elle lance son programme plusieurs fois, comme s'il y avait un aspect aléatoire dans ce dernier.

Le conseil que l'on peut lui donner est de déterminer à l'aide d'inégalités un domaine à l'extérieur duquel elle est sûre qu'il n'y a aucune solution.

2. Une correction de l'exercice.

Suivant que l'on exploite les productions du frère ou de la sœur la correction sera un peu différente. J'ajoute une troisième option conforme aux programmes de première.

1. On s'appuie sur la production du frère :

L'équation cartésienne d'un cercle n'est pas au programme de la classe de première. Cependant, puisque frère Chouquerouste a obtenu une représentation graphique caractéristique, rien n'interdit de l'exploiter.

On fait d'abord remarquer qu'une visualisation empirique des solutions ne convient pas. D'une part il y a des solutions qui peuvent échapper au regard, et d'autre part il peut y avoir des points à coordonnées entières qui semblent être sur le cercle mais qui en réalité n'y sont pas (il faut vérifier chaque fois). Il faut trouver autre chose.

L'équation (E) s'écrit plus favorablement : $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$. En interprétant en termes de carrés de distances, on justifie que cette équation est celle d'un cercle de centre $I(1; -2)$ et de rayon 3.

La question posée revient à déterminer quels sont les points M à coordonnées entières tels que $IM = 3$

L'entier 9 ne s'écrit que trivialement comme somme de deux carrés d'entiers naturels : $9 = 9 + 0$

Ces points M ont nécessairement soit la même abscisse soit la même ordonnée que le point I . Ils appartiennent donc à un diamètre parallèle ou bien à l'axe des abscisses ou bien à l'axe des ordonnées.

On obtient ainsi non pas un mais quatre points à coordonnées entières qui sont sur le cercle (on vérifie).

2. On s'appuie sur la production de la sœur :

Il est indispensable de trouver un domaine rectangulaire en dehors duquel on est sûr qu'il n'y a pas de solution.

Le travail du frère nous y aide, avec l'écriture $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ de l'équation (E).

Si $(x; y)$ appartient à l'ensemble S des couples solutions, alors : $(x-1)^2 \leq 9$ et $(y+2)^2 \leq 9$ c'est-à-dire : $|x-1| \leq 3$; $|y+2| \leq 3$

$(x; y) \in S \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 4 \\ -5 \leq y \leq 1 \end{cases}$. On est sûr qu'il n'y a pas de solution en dehors du domaine ainsi déterminé.

On peut corriger l'algorithme de sœur Chouquerouste (allant de ...) en conséquence.

3. Techniques du second degré :

L'équation (E) apparaît comme une équation au deuxième degré en x dont le discriminant réduit est $\Delta' = -y^2 - 4y + 5 = -(y-1)(y+5)$.

Cette équation admet des solutions réelles lorsque ce discriminant réduit est positif ou nul, c'est-à-dire lorsque $-5 \leq y \leq 1$. Il faut de plus que les solutions éventuelles soient des entiers, et pour cela une condition nécessaire est que $\Delta' = -(y-1)(y+5)$ soit le carré d'un nombre entier.

Outre $y=1$; $y=-5$, valeurs pour lesquelles le discriminant est nul, $\Delta' = -(y-1)(y+5)$ est le carré d'un entier, en l'occurrence celui de 3, lorsque $y=-2$

Lorsque $y=1$, ou lorsque $y=-5$, on obtient $x=1$ comme solution en x .

Lorsque $y=-2$, l'équation (E) devient $x^2 - 2x - 8 = 0$ et a pour solutions en x : $x=-2$; $x=4$

Cette dernière solution semble la plus conforme aux programmes de la classe de première.

L'équation (E) admet exactement quatre couples solutions : $(1; 1)$; $(1; -5)$; $(4; -2)$; $(-2; -2)$

En synthèse, on fait l'inventaire des démarches possibles :

- Interpréter graphiquement (E) comme étant l'équation d'une courbe dont on cherche les points à coordonnées entières.
- Déterminer un domaine fini inclus dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ à l'extérieur duquel on est sûr qu'il n'existe aucune solution et explorer exhaustivement ce domaine à l'aide d'un algorithme.
- Utiliser les techniques de résolution d'une équation au deuxième degré et déterminer des conditions pour que les solutions soient des nombres entiers.

3. Commentaire

La solution de la sœur semble mieux généralisable que celle du frère.

On se propose de résoudre par les deux mêmes méthodes :

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - n = 0$ où n est un entier donné.

Dans celle du frère, il faut pouvoir décomposer l'entier $n + 5$ en somme de deux carrés, ce qui peut ne pas être évident.

Dans celle de la sœur, une fois l'algorithme modifié, on ne s'occupe plus de rien ...

Ci-contre, $n = 4$ comme dans l'énoncé puis $n = 164$ (toutes les solutions n'apparaissent pas sur la capture d'écran ci-contre)

The screenshot shows a TI-BASIC program named "soeurchouq". The left pane displays the output for two different values of n. For n=4, the output is a list of coordinate pairs: [-2 -2], [1 -5], [1 1], and [4 -2], followed by the word "Terminé". For n=164, the output is a longer list of coordinate pairs: [-12 -2], [-11 -7], [-11 3], [-4 -14], [-4 10], [1 -15], [1 11], [6 -14], [6 10], [13 -7], and [13 3]. The right pane shows the program code, which defines the function soeurchouq(n), sets up a loop for i and j, and uses the ceiling function to bound the search. The code is as follows:

```

"soeurchouq" enregistrement effec
Define soeurchouq(n)=
Prgm
Local i,j,u
ceiling(sqrt(n+5))→u
For i,1-u,1+u
For j,-2-u,-2+u
©gilbertjulia2016
If i^2+j^2-2*i+4*j-n=0 Then
Disp [i j]
EndIf
EndFor
EndFor
EndPrgm
  
```