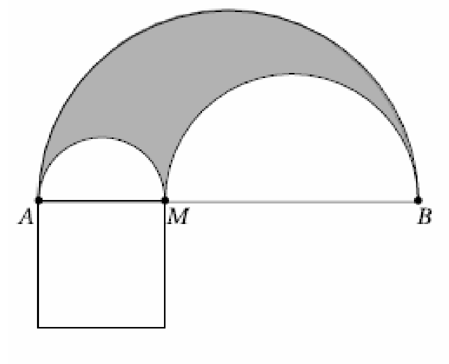
ESD 2016_17 : Problèmes conduisant à la résolution d'une équation

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

On considère un segment [*AB*] et on choisit un point *M* sur ce segment, distinct de *A* et de *B*. Comme sur la figure ci-contre, on construit un demi-cercle de diamètre [*AB*], un demi-cercle de diamètre [*AM*], un demi-cercle de diamètre [*BM*] d'un côté de la droite (*AB*) et un carré de côté *AM* de l'autre côté.

Peut-on choisir le point *M* de telle sorte que l'aire de la surface grisée soit égale à l'aire du carré ?



B. Les réponses de trois élèves de seconde

Elève 1

Je ne vois pas comment on fait car il n'y a aucune valeur sur la figure.

Elève 2

J'ai fait la figure avec un logiciel de géométrie dynamique. On peut choisir le point M de telle sorte que l'aire de la surface grisée soit égale à l'aire du carré.

Il faut prendre $AM = 2{,}64$

Elève 3

Je pose $AB = 1$; $AM = x$. *Pour que les deux aires soient égales, on doit avoir* $\frac{\pi}{4}\left(x - x^2\right) = x^2$ *et donc* $x = \frac{\pi}{\pi + 4}$

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les réponses des trois élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles.

2. Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3. Proposez deux exercices sur le thème *problèmes se ramenant à la résolution d'une équation*. Vous prendrez soin de motiver vos choix.

2. Eléments de correction

L’auteur de ce sujet s’est creusé la cervelle pour proposer une situation se ramenant à la résolution d’une équation du premier degré dont la solution n’a aucune chance d’être devinée. Aucun doute, c’est réussi.

L’énoncé est présenté sous une forme ouverte, sans indication d’aucune sorte. Il est intéressant de remarquer que la généralité a été scrupuleusement respectée, en ne donnant aucune information sur le segment [*AB*]. Les élèves ont à leur complète charge la modélisation et doivent notamment prendre conscience que la longueur du segment [*AB*] n’est pas un paramètre influent.

On remarque l’énoncé judicieusement ouvert : « Peut-on choisir … » qui donne lieu a deux interprétations que l’enseignant ne manquera pas d’évoquer : « Existe-t-il … » c'est-à-dire une question d’existence d’une position convenable et aussi « Quelle est la position … » c'est-à-dire une question de détermination des positions convenables éventuelles.

1. Analyse des travaux d’élèves.
Esclafacanyes.
Cet élève ne s’est engagé dans aucune démarche, stoppé par ce qu’il considérait comme des données manquantes. Il y a selon lui une rupture du contrat didactique avec son professeur. Selon cet élève : « Toute figure doit être donnée avec des côtes numériques précises sinon on ne peut rien faire »
C’est donc au niveau de l’appropriation de la situation qu’un conseil peut lui être donné.
Il n’y a aucun inconvénient à lui proposer de choisir lui-même une valeur numérique pour la distance [*AB*]. L’important est de voir s’il est en mesure de faire ensuite le choix d’un paramètre décrivant la situation et de s’engager une démarche. Si c’est le cas, on pourra ensuite lui demander comment généraliser.

Chouquerouste
Réponse empirique incorrecte.
Comme à l’accoutumée, Chouquerouste a dégainé son logiciel de géométrie et a construit avec une étonnante virtuosité une figure dynamique. Il a même réussi à créer des demi-cercles et à griser le domaine décrit dans l’énoncé : chapeau bas, élève Chouquerouste !
Il n’a cependant pas modélisé correctement la situation car il n’a pas rapporté la longueur *AM* à la longueur *AB* (qu’on ne connaît pas, il n’a pas jugé bon de la préciser). Au niveau réussite, on retiendra donc qu’il a su expérimenter sur un exemple, non qu’il a su modéliser. C’est à peu près tout ce qu’on retiendra car Chouquerouste n’a pas conscience que son exemple n’a aucune valeur de généralité ni que sa réponse est empirique.

Il ne s’engage dans aucune démarche mathématique. C’est ce que l’on peut lui conseiller de faire …

Elève 3.
Réponse correcte.
Cet élève a pris l’initiative de choisir comme unité de mesure la longueur du segment [*AB*], ce dont il a le droit. Il a su choisir un paramètre décrivant la situation et traduire correctement le problème posé par une équation. Il n’a pas jugé bon de décrire toutes les étapes intermédiaires de ses calculs, mais les repères qu’il en donne permettent de dire avec certitude que ces étapes ont été appréhendées et correctement franchies.
Cet élève a réussi à modéliser et à mener à terme le traitement mathématique qui en résultait.
Il faudra détailler cette solution pour ses camarades.

2. Une correction de l’exercice.

On s’appuie sur la production de l’élève 3.
D’abord ses notations : a-t-on le droit de poser $AB=1$? Oui car la propriété d’égalité des aires est invariante par agrandissement ou par réduction. On ne restreindra pas la généralité. On fait remarquer que dans ce cas, le paramètre $x=AM$ choisi pour décrire la situation est un nombre réel appartenant à l’intervalle $]0\,;1[$ (variante choisie ci-dessous). On peut aussi poser $AM=a$ et dans ce cas, le paramètre $x=AM$ appartient à l’intervalle $]0\,;a[$.

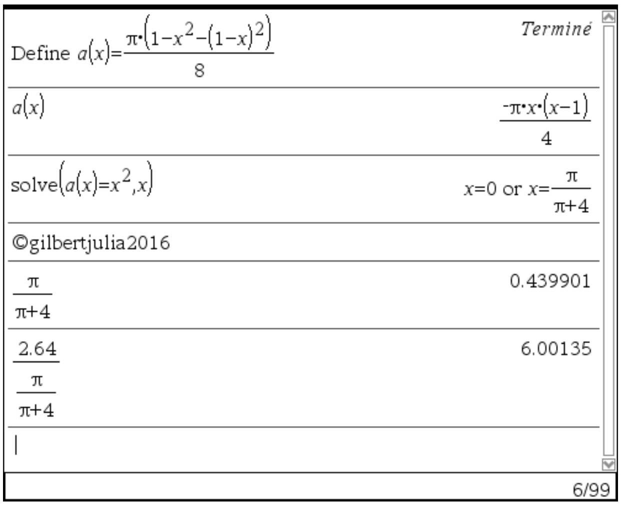
Ensuite, le calcul des grandeurs utiles : le demi-disque de diamètre [AB] a pour aire $\frac{\pi}{8}$, celui de diamètre [AM] a pour aire $\frac{\pi x^2}{8}$, celui de diamètre [BM] a pour aire $\frac{\pi(1-x)^2}{8}$. Le domaine grisé a donc pour aire $\frac{\pi}{8}\left(1-x^2-(1-x)^2\right) {}_{gjulia} = \frac{\pi}{4}\left(x-x^2\right)$. L'aire du carré est quant à elle égale à x^2

Enfin, la condition d'égalité des aires : $\frac{\pi}{4}\left(x-x^2\right)=x^2$, équation obtenue par l'élève 3. On est confronté à une équation du deuxième degré.
On peut se demander comment écrire plus favorablement cette équation et retenir par exemple : $\frac{x}{4}(\pi-\pi x-4x)=0$

L'égalité pour $x=0$ (M en A) a été exclue par hypothèse. On est ramené à la résolution d'une équation du premier degré $x(\pi+4)=\pi$ qui a pour solution : ${}_{gjulia2016}\ x=\frac{\pi}{\pi+4}$

Pour généraliser, on peut faire remarquer que l'égalité des aires est obtenue lorsque $\frac{AM}{AB}=\frac{\pi}{\pi+4}$

Il est pertinent de proposer une valeur approchée du résultat car le nombre ${}_{gjulia2016}\ x=\frac{\pi}{\pi+4}$ ne « nous parle pas ». 0,44 est la valeur approchée décimale de ${}_{gjulia2016}\ x=\frac{\pi}{\pi+4}$ à 10^{-2} près.



À titre de vérification, on peut demander aux élèves de la classe de « prédire » quelle est la longueur du segment [AB] que Chouquerouste a choisi pour sa figure dynamique.

On peut parier que son segment [AB] mesure 6 cm. Il reste à vérifier le pari, l'examen de la figure servant en même temps à valider le travail accompli.

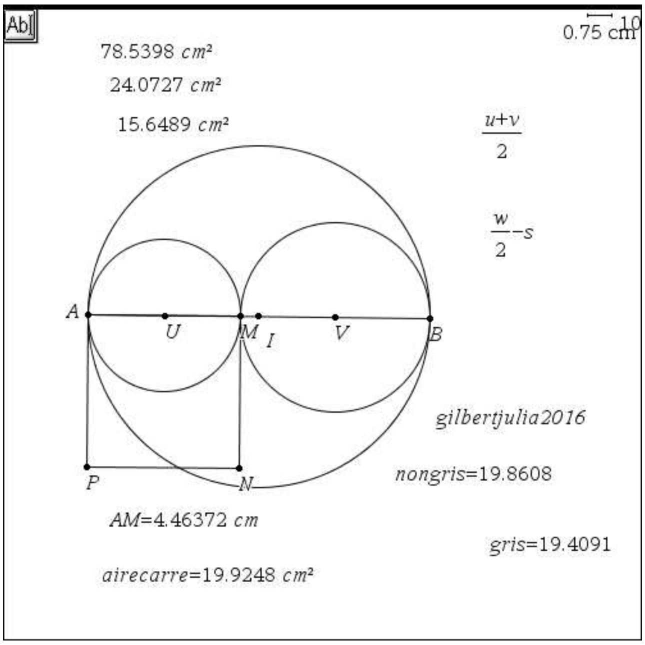
On peut faire remarquer aux élèves que quoi qu'on fasse, on ne peut pas construire la figure présentant exactement le cas d'égalité. Cet exercice illustre en effet une situation type « quadrature du cercle » où la figure idéale est inconstructible à la règle et au compas, elle est donc inconstructible avec les outils géométriques dont on dispose, que ce soit manuellement ou aussi bien avec un logiciel de géométrie.

3. Commentaires

C1. Cette même situation peut être exploitée de deux façons : pour amener à la résolution d'une équation au premier degré (classe de seconde, ce qu'a fait l'auteur de l'exercice) mais aussi pour amener à la résolution d'une équation du deuxième degré (classe de première).

On cherche pour cela s'il existe une position de M telle que l'aire du carré soit égale à l'aire non grisée.

L'étude conduit alors à l'équation : $\frac{\pi}{8}\left(x^2+(1-x)^2\right)_{gjulia}=x^2$ et à la résolution de : $\left(\frac{\pi}{4}-1\right)x^2-\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{8}=0$, équation qui a deux solutions quelque peu folkloriques (mais la situation est construite à cet effet …), dont une seule dans l'intervalle $]0\ ;1[$. La solution trouvée est un réel distinct de celui obtenu dans la situation initiale de seconde mais qui en est curieusement très voisin.



Ma figure dynamique, beaucoup plus artisanale que celle l'as du logiciel qu'est Chouquerouste et construite avec $AB=10$, tente maladroitement d'illustrer les deux situations $_{gj}$.

On « voit » qu'on n'est pas loin du compte, ni pour une égalité avec l'aire grisée, ni pour une égalité avec l'aire non grisée. On n'en est pas loin mais on n'y est pas !

C2. Comme évoqué ci-dessus, l'enseignant peut commenter la consigne de l'énoncé « Peut-on choisir … » qui donne lieu à diverses interprétations.

La fonction « aire grisée » - « aire du carré » est une fonction continue qui prend des valeurs strictement positives (on peut vérifier que c'est le cas lorsque $x=0{,}2\,AB$ par exemple) et des valeurs strictement négatives (en $x=0{,}8\,AB$ par exemple). Le théorème des valeurs intermédiaires s'applique. Une réponse affirmative à la question de possibilité est donc justifiée. Il appartient alors à l'enseignant de relancer la recherche : « si on peut, alors pour quelle position de M ? ».