ESD 2016_15 : Suites

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

On souhaite stériliser une boîte de conserve. pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25°C$ et on la place dans un four à température constante $T_F = 100°C$. La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85°*C*. Pour *n* entier naturel, on note T_n la température en degrés Celsius de la boîte au bout de *n* minutes. Pour *n* non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme ci-contre.	*T* prend la valeur 25 Demander la valeur de *n*. **Pour** *i* variant de 1 à *n* **faire** *T* prend la valeur $0{,}85 \times T + 15$ **Fin** Afficher *T*

1. Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes.
2. Démontrer que pour tout entier naturel *n* on a $T_n = 100 - 75 \times 0{,}85^n$
3. Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-t-elle ?

B. Les réponses proposées par deux élèves de terminale S

	A	B
1	0	15
2	1	15,85
3	2	16,7
4	3	17,55
5	4	18,4
6	5	19,25
7	6	20,1
8	7	20,95
9	8	21,8
10	9	22,65
11	10	23,5

Elève 1

En poursuivant, on trouve que la stérilisation débute au bout de 83 minutes

Elève 2

On doit résoudre $100 - 75 \times 0{,}85^n = 85$

$100 - 75 \times 0{,}85^9 \approx 82{,}6$ *et* $100 - 75 \times 0{,}85^{10} \approx 85{,}2$

Donc la stérilisation commence au bout de 10 minutes.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence ses réussites et ses erreurs.

2. Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale S

3. En motivant vos choix, proposez deux exercices sur le thème *suites*.

2. Eléments de correction

Cet exercice porte sur un exemple de situation où l'on retient l'hypothèse d'une variation proportionnelle à la différence avec une valeur fixe (voir REDCM page 126).

La modélisation est discrète et conduit à une suite arthmético-géométrique. L'originalité de cet exercice est que la relation de récurrence liant deux termes consécutifs de la suite des températures n'est pas donnée explicitement, mais par l'intermédiaire d'un algorithme. Il faut savoir décoder l'algorithme pour exprimer T_{n+1} en fonction de T_n.

1. Analyse des travaux d'élèves.
Bougnègue
Aujourd'hui, Bougnègue n'est pas au sommet de sa forme. On peut supposer qu'il a entré en B1 la formule $=0{,}85\times A1+15$ puis tiré vers le bas.
Il a ainsi confondu la température T de rang précédent (le contenu de la cellule immédiatement au dessus) avec le nombre de minutes écoulées (contenu de la cellule située immédiatement à gauche).
Il n'a donc pas enclenché une récursivité (qui n'aurait pu s'enclencher qu'à partir de la ligne 2, non pas de la ligne 1 du tableur) et le tableur a renvoyé une suite arithmétique de raison 0,85 et de premier terme 15 comme suite des températures.
On retrouve la confusion entre $u_{n+1}=a\,u_n+b$ et $u_n=a\,n+b$ déjà vue cette année dans un autre sujet.
Bougnègue n'a aucune conscience de cette confusion car il n'a pas non plus vérifié ses résultats (ses premières lignes sont en contradiction avec une température ambiante de 25° C).

On ne peut relever de « réussites » significatives.

Pour que Bougnègue puisse se rendre compte de son erreur, on peut lui proposer de vérifier les deux ou trois premières températures ou de dérouler les lignes de son tableau jusqu'au-delà de la centième. La température initiale affichée est-elle conforme à la donnée de l'énoncé ? Est-il possible que la température de la boîte de conserve dépasse 100°C ?

Elève 2.
Cet élève obtient la bonne réponse à l'aide très probablement d'une étude exhaustive des premiers termes de la suite. Il admet implicitement que la suite des températures est une suite croissante puis recherche le dernier terme plus petit que 85 et le premier plus grand que 85, ce qui justifie son choix du dixième terme. (Ce souci de justification est une « réussite »).
Cet élève doit cependant progresser dans le domaine « Communication » (développer une argumentation correcte et s'exprimer avec précision). En effet, on relève deux incorrections :

- Il formule incorrectement le travail qu'il se propose de faire (il annonce une résolution d'équations alors que sa démarche est tout à fait différente)
- Le symbole ≈ « peu différent » n'est pas un symbole mathématique ; « peu différent » n'a aucun sens en langage mathématique. Par exemple, $100-75\times 0{,}85^{10}\approx 85{,}2$ ne justifie pas formellement que $100-75\times 0{,}85^{10}>85$. Une valeur approchée d'un nombre réel doit nécessairement être accompagnée de sa qualité d'approximation pour qu'on puisse en déduire un intervalle dans lequel se situe ce nombre réel. et, le cas échéant, le séparer d'un autre réel.

2. Une correction de l'exercice.

1. Le calcul de T_3 montre que la température de la boîte est 53,9°C à 0,1°C près.

2. La suite récurrente et la suite définie explicitement coïncident pour leurs quatre premiers termes. Démonstration par récurrence.

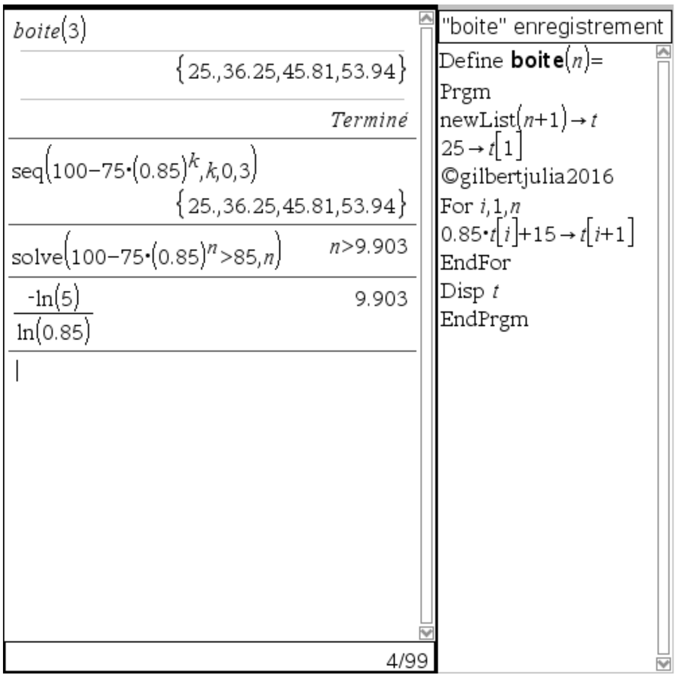
3. On reformule le travail à faire : « Il nous faut rechercher quels sont les entiers tels que $100-75\times 0{,}85^n > 85$ ».

Or $100-75\times 0{,}85^n = 85 \Leftrightarrow 0{,}85^n < \frac{1}{5}$ et

gjulia2016 $0{,}85^n < \frac{1}{5} \Leftrightarrow n > \frac{-\ln 5}{\ln(0{,}85)}$.

Commenter l'affichage calculatrice : 9,903 est la valeur décimale approchée à 10^{-3} près et cela signifie que $9{,}9035 \leq \frac{-\ln 5}{\ln(0{,}85)} < 9{,}9045$.

Ce qui légitime un encadrement par deux entiers consécutifs : $9 < \frac{-\ln 5}{\ln(0{,}85)} < 10$



L'ensemble des entiers naturels n tels que $100-75\times 0{,}85^n > 85$ est l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 10. La stérilisation commence au bout de 10 minutes.

3. Voir REDCM pages 127 à 136.

3. Commentaire

La même situation de variation de température conduirait, dans le cas d'une modélisation continue, à la résolution d'une équation différentielle du premier ordre de la forme $y' = ay + b$.