ESD 2016_12 : Probabilités

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

On dispose des douze figures d'un jeu de cartes : les quatre rois, les quatre dames, les quatre valets.
1. On tire au hasard successivement et avec remise six cartes du jeu. Déterminer combien on peut obtenir de rois en moyenne.

2. On tire au hasard successivement et avec remise n cartes du jeu. Déterminer la valeur minimale de n pour qu'avec une probabilité supérieure ou égale à 0,99 on obtienne un roi.

B. Les réponses proposées par deux élèves de première à la question 1

Elève 1.
J'ai écrit un algorithme qui simule l'expérience décrite 1000 fois.
S prend la valeur 0
Pour** k variant de 1 à 1000 **faire
    Pour** j variant de 1 à 6 **faire
    Affecter à alea une valeur choisie au hasard parme 1, 2 ou 3
        Si** alea $=1$ **alors
        S prend la valeur $S+1$
        Fin
    Fin
Fin
M prend la valeur S/1000
Afficher M

J'ai lancé 3 fois l'algorithme et j'ai trouvé $2{,}007$; $1{,}977$; $1{,}992$. *J'en déduis qu'on peut espérer autour de 2 rois.*

Elève 2
Je vais noter X la variable aléatoire qui donne le nombre de rois que j'ai tirés. Comme en cours, il suffit de calculer $E(X)=6\times\frac{1}{3}$ *car on tire 6 cartes et* $\frac{1}{3}$ *est la probabilité d'obtenir un roi quand on pioche une seule carte. On peut donc espérer 2 rois.*

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez la production de chaque élève en évaluant la pertinence des démarches de chacun et mettant en évidence les compétences acquises et les éventuelles erreurs.

2. En vous appuyant sur les productions des élèves, présentez une correction des deux questions de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première.

3. Proposez deux ou trois exercices sur le thème *probabilités*. Vous motiverez vos choix en précisant les objectifs visés par chacun de ces exercices.

2. Eléments de correction

Voici un exercice d'entraînement portant gj 2016 sur un exemple de « répétition d'expériences identiques et indépendantes à deux ou trois issues » comme le préconise le programme de première. Compte tenu des questions posées, deux issues seulement sont à considérer.

Cet exercice est mal ficelé, l'énoncé comportant notamment deux incorrections :

- D'abord, les deux questions sont disparates, sans lien l'une avec l'autre et posées sans aucun motif justifié. La première question semble destinée à attirer l'attention sur la loi binomiale, mais la notion en jeu (espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale) n'est d'aucun secours pour la question suivante, portant quant à elle sur le franchissement d'un seuil de probabilité dans une autre expérience.
- La formulation « Déterminer combien on peut espérer de rois en moyenne » n'est pas correcte. Par chance (?), il se trouve que l'espérance du nombre de rois est un entier, ce qui ne rend pas apparente l'incorrection de la formulation. Dans d'autres circonstances cette formulation amènerait une réponse aberrante style « on peut espérer 2,1 rois ou $\frac{7}{3}$ de rois ». Il aurait fallu demander « Déterminer l'espérance du nombre de rois ». Le nombre de rois est nécessairement un entier, tandis que l'espérance de ce nombre est un nombre rationnel.
- Il y a une ambiguïté dans l'énoncé de la deuxième question : « on obtient un roi » n'est pas assez précis. S'agit-il de « on obtient au moins un roi » (ce qu'il faut comprendre ici) ou bien de « on obtient exactement un roi » ? Il appartient à l'enseignant d'éviter ce genre d'ambiguïté.

Quant aux travaux d'élèves, on y reconnaît une invraisemblable production Chouquerouste, clairement inventée pour fournir aux candidats l'occasion d'exposer leurs états d'âme sur des questions de simulation d'expérience.

1. Analyse des travaux d'élèves.

Chouquerouste

Solution incorrecte.

Aujourd'hui, Chouquerouste a voulu « élaborer une simulation numérique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel » (compétence). Il gj 2016 a écrit en langage naturel un algorithme démontrant des capacités à programmer un calcul itératif, ainsi qu'une instruction conditionnelle.

Son intention était probablement de simuler 1000 expériences telles que décrites à la question 1 et de calculer la moyenne des nombres de rois obtenus lors de ces expériences. Cependant, son algorithme équivaut en pratique à simuler 6000 tirages d'une seule carte (voir « pour aller plus loin »).
Cette confusion n'induit pas d'erreur sur le calcul de la moyenne du nombre de rois obtenus parmi 6 tirages, cette moyenne étant bien six fois la fréquence d'apparition d'un roi.

Son erreur est de « déduire » gj 2016 arbitrairement le résultat comme découlant naturellement de la simulation.
En aucun cas une simulation ne peut *déterminer* la valeur d'un paramètre. Elle peut seulement situer cette valeur dans un intervalle.
Cette erreur est provoquée par la tournure de la question posée qui induit comme réponse un nombre entier (elle doit donc être attribuée davantage à l'enseignant qui a mal posé la question qu'à l'élève).

Il faudrait proposer à Chouquerouste de confronter son travail avec celui de l'élève 2, ou l'inciter à modéliser le nombre de rois obtenus au cours d'une expérience à l'aide d'une loi de probabilité.

Elève 2.
Solution correcte.
Cet élève a su implicitement « traduire en langage mathématique une situation réelle à l'aide d'une loi de probabilité » (compétence). Certes, pour s'assurer complètement de cette « compétence », on aurait bien aimé qu'il mentionne explicitement « loi binomiale ». Mais il en cite les paramètres et fait référence au cours sur cette loi pour calculer l'espérance. Il paraît clair qu'il a correctement modélisé l'expérience et identifié la notion mathématique en jeu.

2. Correction de l'exercice

Il n'y a pas vraiment lieu de s'attarder sur la question 1. On fera expliciter à l'élève 2 la nature de la loi de probabilité suivie par sa variable aléatoire *X*, en l'occurrence $B\left(6,\ \frac{1}{3}\right)$ et on rappellera la formule de calcul de l'espérance.

Pour la question 2, on fera remarquer que le nombre X_n de rois obtenus lors de *n* tirages d'une carte suit là aussi une loi binomiale, cette fois-ci $B\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$. Lorsque l'on fait tendre *n* vers l'infini, la probabilité d'obtenir au moins un roi tend vers 1, ce qui justifie pourquoi cette question est posée : il doit exister une valeur de *n* à partir de laquelle le seuil de probabilité 0,99 est franchi.

L'entier *n* étant fixé, l'évènement « $X_n \geq 1$ » est complémentaire de l'évènement « $X_n = 0$ ». La somme des probabilités de ces deux évènements est égale à 1.
Revenir si besoin est sur la complémentarité des évènements « au moins un … » et « aucun … ».

Ainsi : $P([X_n \geq 1]) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow P([X_n = 0]) \leq 0{,}01$

Or l'évènement « $X_n = 0$ » a pour probabilité : $P([X_n = 0]) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$P([X_n \geq 1]) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0{,}01$.

Inventorier les méthodes qui permettent de déterminer les entiers *n* vérifiant $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0{,}01$.

En particulier, la composition par la fonction logarithme népérien qui, en tant que fonction strictement croissante, conserve le sens des inégalités. $P([X_n \geq 1]) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{2}{3}\right) \leq \ln 0{,}01$.

Le réel $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ étant strictement négatif :

$$P([X \geq 1]) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{2\ln 10}{\ln 3 - \ln 2}.$$

gjulia2016

On est amené à chercher quel est le plus petit entier naturel vérifiant cette inégalité.

La calculatrice indiquant que : $11{,}3 < \dfrac{2\ln 10}{\ln 3 - \ln 2} < 11{,}4$:

gjulia2016

$$P([X \geq 1]) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow n \geq 12$$

Ce qu'une tabulation comme ci-contre peut confirmer.

	A num	B aucun	C aumoinsun	D	E
◆	=seq(k,k,1,15)	=(2/3)^num	=1−aucun		
1	1.	0.6667	0.3333	gjulia2016	
2	2.	0.4444	0.5556		
3	3.	0.2963	0.7037		
4	4.	0.1975	0.8025		
5	5.	0.1317	0.8683		
6	6.	0.0878	0.9122		
7	7.	0.0585	0.9415		
8	8.	0.039	0.961		
9	9.	0.026	0.974		
10	10.	0.0173	0.9827		
11	11.	0.0116	0.9884		
12	12.	0.0077	0.9923		
13	13.	0.0051	0.9949		
14	14.	0.0034	0.9966		
15	15.	0.0023	0.9977		

12 num

La valeur minimale de n pour que la probabilité d'obtenir au moins un roi soit supérieure ou égale à 0,99 est 12.

3. Pour aller plus loin

Quelques remarques sur la production de Chouquerouste…

L'algorithme de Chouquerouste

Les nombres de rois obtenus lors d'un tirage de 6 cartes ne sont pas enregistrés par son algorithme.
Le tirage d'un roi augmente d'une unité le compteur s du nombre de rois obtenus en tout, compteur initialisé en début de programme.

Chouquerouste calcule : $m = \dfrac{1}{1000}\displaystyle\sum_{k=1}^{6000} u(k)$

où $u(k) = \begin{cases} 1 \textbf{ si } a = 1 \\ 0 \textbf{ sinon} \end{cases}$, c'est-à-dire six fois la fréquence qu'une carte tirée soit un roi au cours d'une série de 6000 tirages.

gjulia2016

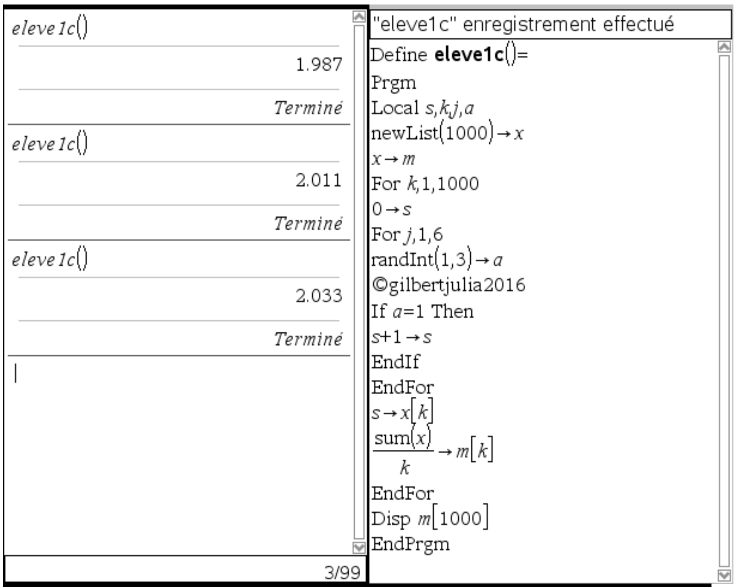
```
eleve1()
                2.024
              Terminé
eleve1()
                1.989
              Terminé
eleve1()
                2.071
              Terminé
eleve1()
                1.986
              Terminé
                 4/99
```

```
"eleve1" enregistrement effectué
Define eleve1()=
Prgm
Local s,k,j,a,m
0→s
For k,1,1000
For j,1,6
randInt(1,3)→a
©gilbertjulia2016
If a=1 Then
s+1→s
EndIf
EndFor
EndFor
s/1000→m
Disp m
EndPrgm
```

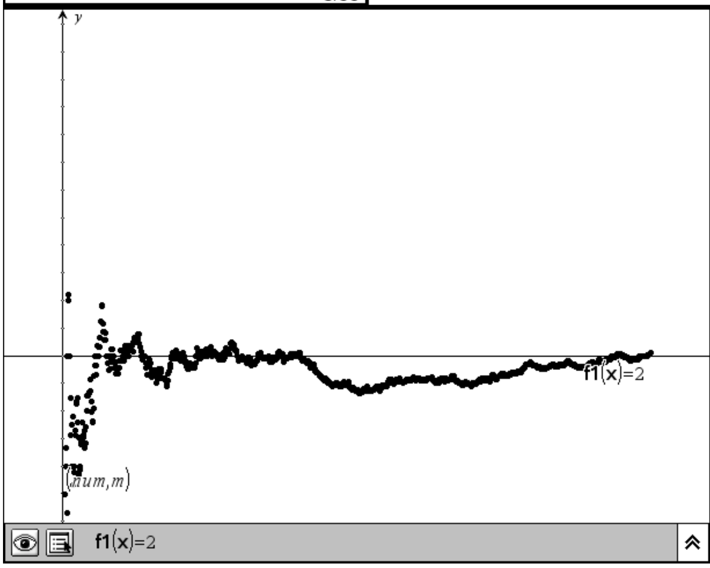
Un algorithme corrigé

Les nombres de rois obtenus lors des tirages de 6 cartes sont listés en liste **x**. La liste **m** en calcule la moyenne. En particulier :

$m[1000]=\dfrac{1}{1000}\sum_{k=1}^{1000} x[k]$ est la moyenne des nombres de rois obtenus lors de 1000 tirages de 6 cartes.



Un graphique peut faire visualiser l'évolution de la moyenne du nombre de rois obtenus.



Chouquerouste n'a pas calculé la probabilité de tirer un roi quand on tire une seule carte, sa démarche l'en dispensait. Cette probabilité est pour lui inconnue.

De sa production, on pourrait extraire trois intervalles de confiance dans lesquels, avec une probabilité au moins égale à 95 %, se trouve ce « nombre inconnu », par exemple :

$\left[\dfrac{1{,}977}{6}-\dfrac{1}{\sqrt{6000}}\ ;\ \dfrac{1{,}977}{6}+\dfrac{1}{\sqrt{6000}}\right]$ soit, avec les arrondis adéquats, l'intervalle $[0{,}316\ ;\ 0{,}343]$.