ESD 2016_10 : Problèmes avec prise d'initiative

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Un pépiniériste propose à la vente des plants de mufliers à 5,25 € le plant et des plants de jacinthes à 2,50 € le plant. A la fin de la journée, sa recette est de 338 € et il sait qu'il a vendu au moins 40 plants dechaque sorte.
Déterminer le nombre de plants de chaque sorte qui ont été vendus.

B. Les réponses proposées par trois élèves de terminale S spécialité mathématiques

Elève 1
Je note x le nombre de mufliers et y le nombre de jacinthes. J'ai donc l'équation diophantienne $5{,}25x + 2{,}50y = 338$.

J'écris l'algorithme d'Euclide : $\begin{array}{l} 5{,}25 = 2{,}50 \times 2 + 0{,}25 \\ 2{,}50 = 0{,}25 \times 10 + 0 \end{array}$

J'essaie de résoudre l'équation diophantienne mais je n'arrive pas à appliquer l'égalité de Bezout.

Elève 2
On a $5{,}25x + 2{,}50y = 338$ *or* $5{,}25 \times 40 + 2{,}50 \times 40 = 310$.
Donc $5{,}25 \times x + 2{,}50 \times y = 28$. *Je dois donc résoudre* $21x + 10y = 112$.
Donc logiquement, x doit finir par 2. Le pépiniériste a donc vendu 42 mufliers et 47 jacinthes.

Elève 3
On peut trouver le résultat 42 et 47 grâce à un algorithme.
x est le nombre de mufliers
y est le nombre de jacinthes
x prend la valeur 40
y prend la valeur 40
Tant que $5{,}25 \times x + 2{,}50 \times y \neq 338$ ***faire***
Changer les valeurs de x et de y
Fin
Afficher x et y

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions des trois élèves en étudiant les compétences manifestées et indiquez les aides que vous pourriez leur apporter.

2. Présentez, en vous appuyant sur les productions d'élèves, une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique spécialité mathématiques.

3. Proposez deux exercices, un au niveau lycée et un au niveau collège, sur le thème *problèmes avec prise d'initiative*. Vous prendrez soin de motiver vos choix,

2. Eléments de correction

Proposé dans la rubrique « *problèmes avec prise d'initiative* », cet exercice est en fait un exercice d'arithmétique conduisant à la résolution dans l'ensemble des entiers naturels d'une équation de la forme $a\,x + b\,y = c$.

La difficulté est ici que les coefficients résultant naturellement des données du problème sont non pas des entiers mais des nombres décimaux. L'élève 1, par exemple, n'a pas su surmonter cette difficulté.
Il faudra donc « prendre l'initiative » de multiplier les deux membres de l'équation obtenue par un même nombre bien choisi, à moins que d'autres initiatives astucieuses soient mises en œuvre.

On peut regretter la condition « au moins 40 plants de chaque espèce » qui restreint quelque peu l'initiative et rend unique le couple solution que l'on obtient. Une non unicité (« au moins 30 plants ») aurait permis de mettre en évidence le fait que le travail de l'élève 2 « n'était pas fini ».

Passons sur le fait que, si on parle peut-être de plants de mufliers (?), il s'agit de bulbes de jacinthes. Personnellement, j'aurais préféré des aubergines et des poivrons ☺.

1. Analyse des travaux d'élèves.

Elève 1.
Cet élève suit la démarche classique de résolution d'une équation diophantienne $a\,x + b\,y = c$ lorsque les coefficients *a* et *b* sont des entiers premiers entre eux.
Il cherche une solution particulière de l'équation en écrivant l'algorithme d'Euclide appliqué aux nombres décimaux 5,25 et 2,5 et, probablement, en se proposant d'appliquer ensuite l'algorithme de Bézout.

On peut penser que de $\begin{cases} 5{,}25 = 2{,}50 \times 2 + 0{,}25 \\ 2{,}50 = 0{,}25 \times 10 + 0 \end{cases}$ il déduit : $0{,}25 = 5{,}25 - 2{,}5 \times 2$. Le résultat le déconcerte car il s'attend à obtenir une relation de la forme $1 = 5{,}25 \times u - 2{,}5 \times v$.
Cet élève n'a pas su surmonter l'obstacle créé par la présence de coefficients décimaux.
Il connaît l'égalité de Bézout (savoir) et semble sur une bonne voie de résolution d'une équation $a\,x + b\,y = c$ à coefficients entiers mais on n'a aucune preuve que sa démarche aurait effectivement abouti.
Il ne montre aucune autre « compétence » dans le domaine de la prise d'initiative que le fait d'avoir su traduire la situation proposée par une équation pertinente.

On peut attirer son attention sur le fait qu'il applique des techniques d'arithmétique des nombres entiers à des nombres décimaux et lui conseiller de rendre entiers tous les coefficients de l'équation. Pas d'autre conseil, pour voir si oui ou non cet élève sait résoudre jusqu'à son aboutissement une équation $a\,x + b\,y = c$ à coefficients entiers.

Elève 2.
Cet élève écrit la même équation que l'élève 1 mais, contrairement au précédent, prend deux initiatives.

- Il effectue un changement d'inconnues.
- Il utilise un argument arithmétique pertinent (de numération en base dix) pour construire une solution particulière correcte.

On peut lui conseiller deux choses :

- Noter différemment (*u* et *v* par exemple) les inconnues de son équation $5{,}25 \times x + 2{,}50 \times y = 28$. Les mêmes notations ne peuvent pas désigner deux objets différents dans un même raisonnement.
- On est d'accord sur le fait que $(42\ ;\ 47)$ est une solution, mais comment être sûr que c'est la seule ?

Chouquerouste..
Aujourd'hui, Chouquerouste nous propose une tentative d'arnaque. Son algorithme ne fonctionne pas et a été manifestement écrit *a posteriori* alors qu'il connaissait déjà 42 et 47.

Il sait définir les entrées et initialiser son algorithme mais il oublie qu'une boucle « While … EndWhile » nécessite d'une part un test et d'autre part une action permettant de rapprocher l'état courant du seuil critique.
« Changer les valeurs » n'est pas une action pertinente.

Aucune « compétence », sinon l'enfumage de son enseignant.

2. Une correction de l'exercice.
On s'appuie sur les productions des élèves 1 et 2 en comparant les équations qu'ils sont amenés à résoudre.

- L'élève 1 doit résoudre « l'équation diophantienne » $5{,}25x+2{,}50y=338$ où x et y sont les nombres respectifs de mufliers et de jacinthes.
- L'élève 2 se propose de résoudre $5{,}25x+2{,}50y=28$.

On explicite ce qu'est une « équation diophantienne ». C'est une équation dont les inconnues sont des nombres entiers relatifs.
On fait la distinction entre les notations utilisées par l'élève 1 et celles utilisées par l'élève 2. Si on pose : $x=40+u$; $y=40+v$, les entiers u et v représentent les nombres de mufliers et de jacinthes vendus en supplément de la vente minimale annoncée.
Ou bien on résout $5{,}25x+2{,}50y=338$ où x et y sont les nombres respectifs de mufliers et de jacinthes ou bien on résout $5{,}25u+2{,}50v=28$ où u et v représentent les nombres de mufliers et de jacinthes vendus en supplément de la vente minimale de 40 plants de chaque sorte.

L'élève 2 multiplie par 4 les deux membres de son équation. Pourquoi ? Les coefficients de l'équation à résoudre sont après cette opération tous des nombres entiers :
L'équation de l'élève 1 devient : $21x+10y=1352$ et celle de l'élève 2 devient : $21u+10v=112$, on gagne au change.
On note au passage que les coefficients 21 et 10 sont premiers entre eux. Les deux équations ont nécessairement des solutions au moins dans $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ sinon dans $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$.

Puisque l'élève 2 a « logiquement » obtenu $u=2$; $v=7$, suivons son idée. Il a trouvé effectivement un couple solution. Le problème est-il résolu ? Non, il a trouvé une *solution particulière* mais non *l'ensemble des solutions*. Il y a peut-être d'autres solutions.
$21u+10v=112 \Leftrightarrow 21(u-2)+10(v-7)=0$.
On conclut que $(u\ ;\ v)$ est un couple solution de l'équation $21u+10v=112$ dans $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ si et seulement si il existe un entier relatif k tel que : $\begin{cases} u=2+10k \\ v=7-10k \end{cases}$. L'entier $k=0$ est bien le seul pour lequel le couple solution correspondant est formé de deux entiers naturels.
Le pépiniériste a vendu 42 mufliers et 47 jacinthes.

3. Pour aller plus loin.

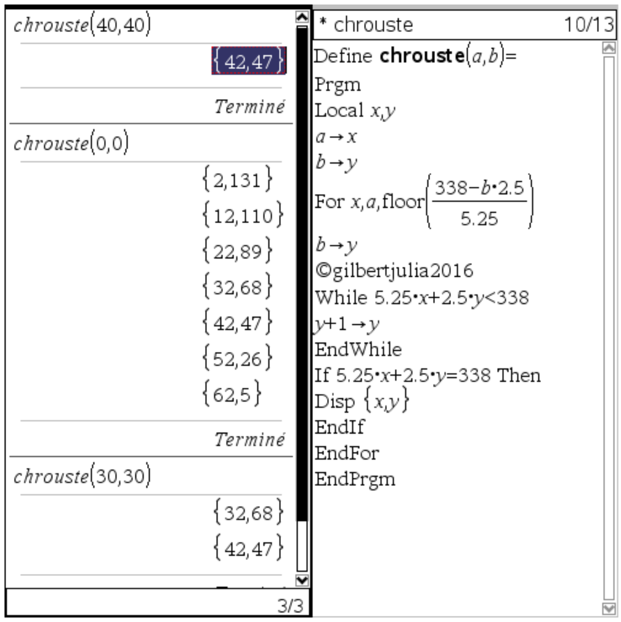
1. On peut se proposer de revenir sur l'équation de l'élève 1 : « Comment obtenir une solution particulière de l'équation (E) : $21x+10y=1352$? » ce que l'on aurait dû faire sans la condition « plus de 40 plants de chaque sorte ».

Un couple qui vérifie de façon évidente l'égalité de Bezout est le couple $(1\ ;\ -2)$. Le couple $(1352\ ;\ -2704)$ est solution particulière de (E). L'ensemble des solutions dans $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ de (E) est de ce fait l'ensemble des couples $\begin{cases} x=1352-10k \\ y=-2704+21k \end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$. Il s'agit de couples d'entiers naturels lorsque $129\le k\le 135$.

On obtient ainsi les couples $(62\ ;\ 5)$; $(52\ ;\ 26)$; $(42\ ;\ 47)$; $(32\ ;\ 68)$; $(22\ ;89)$; $(12\ ;\ 110)$; $(2\ ;\ 131)$.

2. On note que la solution particulière obtenue n'est pas très pratique. Aurait-on pu en obtenir une autre, meilleure, en corrigeant l'algorithme de Chouquerouste ?

Le programme ci-contre s'adapte à diverses initialisations dont, bien entendu, celle de l'énoncé.



4. Commentaires

Il est intéressant de constater que l'élève 1 « écrit un algorithme d'Euclide » portant sur des nombres décimaux. On peut se poser la question : est-ce légitime ?

L'ensemble des nombres décimaux est en effet muni d'une structure d'anneau euclidien. Il y existe une division euclidienne. Les relations écrites par l'élève 1 sont bien un algorithme d'Euclide dans l'ensemble des décimaux. C'est un anneau principal, la notion de PGCD y est définie. En l'occurrence, 0,25 est bien le PGCD dans l'anneau des décimaux de 5,25 et de 2,5.