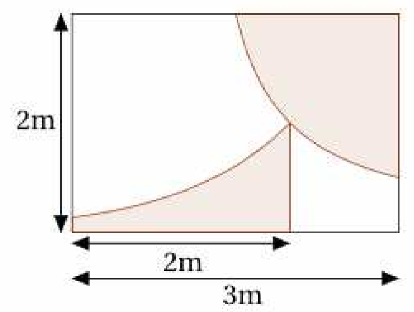
ESD 2016_06 : Grandeurs et mesures

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Léonard désire réaliser une fresque murale pour décorer un mur de sa chambre. Le modèle choisi est schématisé ci-contre. Le bord supérieur de la partie en bas à gauche est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$ par : $f(x)=\mathbf{e}^{x-2}$. Le bord inférieur de la partie en haut à droite est modélisé par la fonction g définie sur l'intervalle $[1{,}5\ ;\ 3]$ par : $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$.



Il dispose d'un pot de peinture de 0,5 litre dont le pouvoir couvrant est 5 m^2 par litre. Ce pot lui suffira-t-il pour réaliser sa fresque ?

B. Extrait du document « les compétences mathématiques au lycée »

La formation mathématique au lycée général et technologique vise deux objectifs :

- *L'acquisition de connaissances et de méthodes nécessaires à chaque élève pour construire son avenir personnel, professionnel et citoyen, et préparer la poursuite d'études supérieures.*
- *Le développement de compétences transversales (autonomie, prise d'initiative, adaptabilité, créativité, rigueur...) et de compétences spécifiques aux mathématiques : Chercher […], Modéliser […], Représenter […], Calculer[…], Raisonner […], Démontrer*

Cadre de mise en œuvre
La résolution de problèmes est un cadre privilégié pour développer, mobiliser et combiner plusieurs de ces compétences. Cependant, pour prendre des initiatives, imaginer des pistes de solution et s'y engager sans s'égarer, l'élève doit disposer d'automatismes. En effet, ceux-ci facilitent le travail intellectuel en libérant l'esprit des soucis de mise en œuvre technique et élargissent le champ des démarches susceptibles d'être engagées. L'installation de ces réflexes nécessite la mise en œuvre directe, sur des exercices aux objectifs circonscrits, de procédures de base liées à chacune de ces compétences. Il n'y a pas d'ordre chronologique imposé entre l'entraînement sur des exercices et la résolution de problèmes. Cette dernière peut en effet révéler le besoin de s'exercer sur des tâches simples, d'ordre procédural, et motiver ainsi la nécessité de s'y engager.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Précisez en quoi un tel exercice répond aux objectifs mentionnés dans le document « compétences mathématiques au lycée ».

2. Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale S.

3. Proposez deux ou trois exercices sur le thème *grandeurs et mesures* à des niveaux de classe différents dont l'un au moins pour des élèves de collège. Vous prendrez soin de motiver vos choix.

2. Eléments de correction

Ce sujet met en scène un calcul d'aire à l'aide d'intégrales. La situation proposée se démarque des calculs d'aires classiques sur deux points importants :

- À propos de la question posée : question ouverte rédigée de sorte qu'il n'est pas demandé le calcul de l'aire d'un domaine, mais la comparaison de l'aire d'un domaine avec un nombre simple (l'aire grisée est-elle plus grande ou plus petite que 2,5 ?). De ce fait, on a *a priori* le choix entre le calcul exact de l'aire et un encadrement de cette aire (en espérant que cet encadrement va séparer l'aire du nombre 2,5).
- À propos de la nature du domaine dont on considère l'aire : il ne s'agit pas d'un domaine faisant appel à une « aire sous la courbe » mais d'un domaine complexe. Il nécessite le recours à un découpage et à la mobilisation des propriétés d'additivité des aires.

On notera l'habillage un peu fantaisiste, qui est destiné à susciter auprès des élèves une certaine curiosité et un sentiment de challenge (« peindra, peindra pas »). On espère évidemment que les élèves seront sensibles à l'humour léonardien, mais ça, ce sont des figues d'un autre panier.

1. L'énoncé de cet exercice présente la plupart des caractéristiques d'un « problème ouvert » :

- L'énoncé est assez bref, facile à comprendre (à part peut-être le « pouvoir couvrant » qu'on expliquera s'il le faut).
- La solution n'est pas évidente et est sujette à débat.
- Aucune méthode de résolution n'est induite, il n'y a pas de guidage de recherche. Ce qu'il y a réellement à rechercher n'est d'ailleurs pas explicite, la question est posée de manière détournée.

D'abord, en tant que « problème ouvert », il est destiné plus spécifiquement au développement de compétences transversales, conformément aux textes officiels.

Ensuite, il faudra interpréter et reformuler la question posée (la traduire en langage mathématique).

Enfin, la situation proposée et le choix du domaine grisé sont de nature à « révéler le besoin de s'exercer sur des tâches simples, d'ordre procédural, et motiver ainsi la nécessité de s'y engager ». En l'occurrence, cet exercice est destiné à approfondir la notion de calcul d'aires de domaines qui ne se résument pas à des « domaines sous une courbe » mais présentent au contraire une certaine complexité.

Cet exercice se situe après l'étude de la notion d'aire sous la courbe. De la sorte, les élèves disposeront d'outils adéquats pour tester la validité de leurs conjectures. Il peut éventuellement être posé avant d'aborder le calcul d'aire entre deux courbes (pour introduire la notion).

2. Correction de l'exercice.

On peut (?) commencer la correction de cet exercice en faisant un rapide bilan de divers encadrements de l'aire grisée que, peut-être (?), certains élèves ont obtenus. On peut par exemple utiliser une corde de C_f et une tangente à C_g pour maximiser l'aire grisée par la somme des aires d'un trapèze et d'un triangle ou bien une tangente à C_f et une corde de C_g pour la minimiser. Ces méthodes devraient échouer, elles ne permettent pas de trancher si le pot de peinture suffira ou non. Elles ont l'avantage de préparer à des découpages du domaine en deux ou trois morceaux.

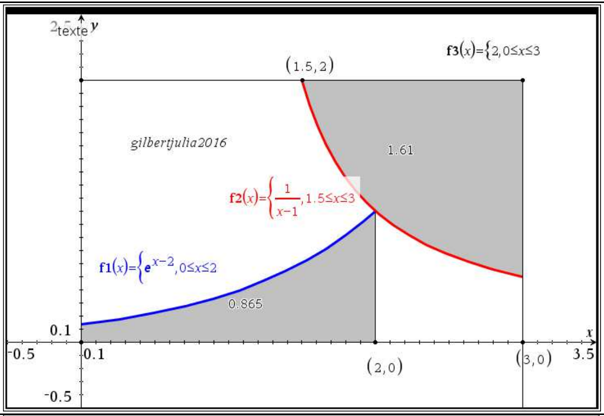
Il faut se résigner à un calcul exact …

Méthode 1 :
On partage le domaine grisé en deux parties dont on calcule l'aire séparément (comme le suggère l'énoncé) :
Une partie est située sous la courbe C_f.

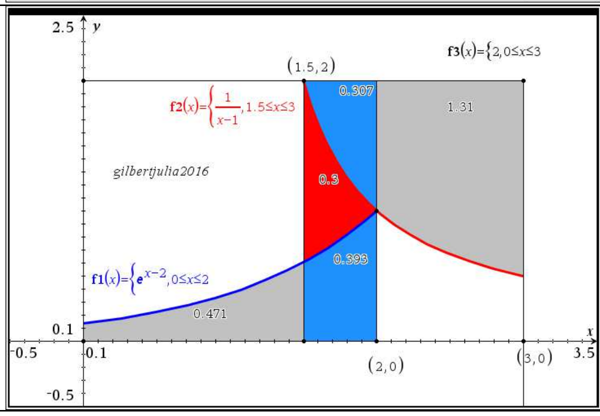
Son aire est : $\int_0^2 f(x)\mathbf{d}x$.

Une autre est située au dessus de la courbe C_g et au dessous de la droite d'équation $y=0$.

Son aire est : ${}_{gjulia2016}\int_{1,5}^3 (2-g(x))\mathbf{d}x$.



Méthode 2 :
On effectue un découpage plus fin. On reconnaît une « aire sous la courbe », la partie complémentaire d'une zone délimitée (en bleu, complémentaire du domaine colorié en rouge) et une zone délimitée.



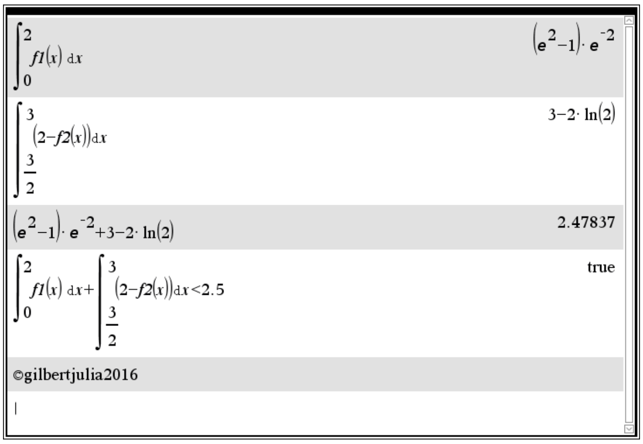
Méthode 3 :
Si on définit sur $[0\ ;\ 3]$ la fonction h :

$$h(x)=\begin{cases} f(x)\ si\ 0\le x\le 1{,}5 \\ 2+f(x)-g(x)\ si\ 1{,}5<x\le 2 \\ 2-g(x)\ si\ 2<x\le 3 \end{cases}{}_{gilbertjulia2016}$$

, on peut même exprimer l'aire voulue sous la forme d'une unique intégrale : $\int_0^3 h(x)\mathbf{d}x$ (mais on ne coupera à l'utilisation de la relation de Chasles pour le calcul effectif).

Un logiciel de calcul formel valide les résultats en ce qui concerne la méthode 1.

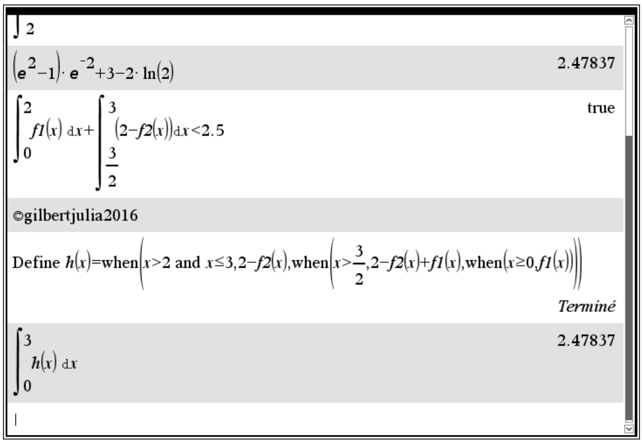
On conclue que l'aire du domaine grisé est comprise entre 2,47 et 2,48 donc est plus petite que 2,5.



En ce qui concerne la méthode 3, le logiciel ne calcule pas en mode Exact. Vu que on ne connaît pas la qualité d'approximation, on peut conjecturer mais non prouver que l'aire est plus petite que 2,5.

Dans ce cas, un calcul « à la main » via une relation de Chasles est incontournable. On est ramené à la méthode précédente.

Moralité : on ne gagne rien en exprimant l'aire sous la forme d'une unique intégrale.



Quelle que soit la méthode choisie (1 ou 2 paraissent les plus judicieuses), on pourra détailler les différentes propriétés utilisées :

- La propriété d'additivité des aires (liée à un découpage).
- La propriété de linéarité de l'intégrale.

Par exemple, dans la méthode 1, la partie grisée décrite dans l'énoncé comme étant « en haut à droite » est la partie complémentaire d'une aire sous la courbe par rapport à un rectangle de hauteur 2.

L'aire du rectangle s'exprime sous forme d'intégrale par : $\int_{3/2}^{3} 2\,\mathbf{d}x$.

L'aire sous la courbe par $\int_{3/2}^{3} g(x)\mathbf{d}x$. Sa partie complémentaire a donc pour aire $\int_{3/2}^{3} 2\,\mathbf{d}x$ - $\int_{3/2}^{3} g(x)\mathbf{d}x$ (additivité des aires)

Compte tenu des propriétés de linéarité : $\int_{3/2}^{3} 2\,\mathbf{d}x - \int_{3/2}^{3} g(x)\mathbf{d}x \underset{gjulia2016}{=} \int_{3/2}^{3} (2-g(x))\mathbf{d}x$

On insistera sur l'intérêt de calculer en mode Exact. Le résultat exact du calcul intégral $4 - \mathbf{e}^{-2} - 2\ln 2$ n'est encadré, ou majoré, qu'à la fin du calcul.

On peut utiliser les inégalités : $\mathbf{e}^{-2} > 0{,}13$; $\ln 2 > 0{,}69$ donnés par une calculatrice qui induisent : $4 - \mathbf{e}^{-2} - 2\ln 2 \underset{gjulia2016}{<} 4 - 0{,}13 - 1{,}38 = 2{,}49$

(Ouf ! Léonard n'a pas intérêt à renverser son pot de peinture).