ESD 2016_04 : Suites

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

On considère la suite (u_n) définie de la manière suivante :
$u_0 = 7$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 10u_n - 18$.
Déterminer pour tout entier naturel n l'expression de u_n en fonction de n.

B. Les réponses proposées par deux élèves de terminale S

Elève 1
Je calcule les premiers termes de la suite :
$u_1 = 10\times 1 - 18 = -8$ *;* $u_2 = 10\times 2 - 18 = 2$ *;* $u_3 = 10\times 3 - 18 = 12$ *;* $u_4 = 10\times 4 - 18 = 22$.
Il semble que la suite soit arithmétique mais cela ne fonctionne pas avec u_0. Pourtant, en posant $f(x) = 10x - 18$, on définit u_n à l'aide de la fonction affine f donc la suite devrait être arithmétique.

Elève 2.
Je constate que $u_1 = 52$; $u_2 = 502$; $u_3 = 5002$.
Il semble que pour tout entier n sauf zéro, $u_n = 500...02$ *où le nombre de zéros est* $n-1$.
Preuve : Supposons que $u_n = 500...02$ *avec* $n-1$ *zéros entre le 5 et le 2.*
Alors la multiplication par 10 donne 500..020. En retranchant 18, le 20 se transforme en 02. Donc on a l'écriture finale est 500..002 avec un zéro de plus que pour u_n. Ainsi on a bien $u_{n+1} = 500...002$ *avec* $n-1+1$ *zéros entre le 5 et le 2 et la propriété est démontrée par récurrence.*

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites, les compétences développées par chacun et leurs éventuelles erreurs.

2. Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale S.

3. Proposez deux ou trois exercices sur le thème *géométrie plane*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

2. Eléments de correction

Cet exercice est classé dans le thème « *Suites* ». Il n'est pas certain que ce classement soit le plus judicieux. Aussi bien, il pourrait être classé en « *Conjecture et démonstration* ».

L'exercice propose certes l'étude d'une suite arithmético-géométrique, c'est-à-dire une suite définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = a\,u_n + b$.
En général, l'étude d'une telle suite s'effectue à l'aide d'une suite auxiliaire géométrique, en l'occurrence la suite $(u_n - \alpha)$ où α est le point fixe de la fonction $x \mapsto a\,x + b$, solution de $x = a\,x + b$. On trouvera cette méthode développée dans plusieurs autres sujets sur les suites (voir aussi Commentaire).

Mais le choix des coefficients *a* et *b* (en particulier du coefficient *a*) me laisse penser que l'enseignant voulait plutôt travailler sur le thème « *conjecture et démonstration* », la suite n'étant qu'un prétexte. La production de l'élève 2 illustre bien l'objectif probablement visé par l'enseignant : il voulait que les élèves calculent les premiers termes et en tirent quelques idées. En choisissant $a = 10$, les élèves vont en effet observer des régularités dans l'écriture décimale des premiers termes. Régularités qui devraient amener à des conjectures qu'il convient ensuite de démontrer. Nul besoin alors dans cette démarche de la traditionnelle « suite auxiliaire ».

1. **Analyse des travaux d'élèves.**

Elève 1.
Réponse incorrecte.
Cet élève confond la notion de suite définie par une formule explicite $u_n = f(n)$ avec le notion de suite définie par la donnée d'un terme initial et d'une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Cette confusion est rédhibitoire. Cet élève ne répond pas à la question posée car il ne donne aucune expression de u_n en fonction de *n*.

On relève dans sa production un savoir : il sait qu'une suite arithmétique est caractérisée par le fait que u_n est fonction affine de *n* : $u_n = a\,n + b$.

Il sait s'engager dans une démarche et conserver une attitude critique par rapport à sa démarche. Toutefois, cette attitude critique reste inaboutie (selon lui la suite « devrait » être arithmétique mais il n'y a pas de conclusion franche à ce propos).

Il faudrait encourager cette attitude critique. Et lui faire développer son raisonnement : « Si la suite est bien arithmétique comme tu le penses, comment s'exprime u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n ? Quelle est la forme de la relation qui lie ces deux termes ? ». Il y a des chances que c'est élève sache que cette expression est de la forme $u_{n+1} = u_n + C$ (on attend en fait $u_{n+1} = u_n + 10$). Si tel est le cas, confronter avec la formule de récurrence donnée par l'énoncé. « Le 10 n'est pas au bon endroit … Pourquoi ? »
L'erreur de cet élève permet éventuellement de faire distinguer aux élèves les deux types de suites :

- Suite définie par la donnée d'un terme initial et d'une relation de récurrence : pour calculer u_n il faut calculer tous les termes intermédiaires depuis le terme initial.
- Suite définie par une formule explicite : on peut exprimer le terme u_n quel que soit son rang (d'où l'intérêt de disposer d'une telle formule. C'est d'ailleurs un objectif de l'exercice).

Elève 2.
Réponse que l'on peut considérer comme correcte même si ce n'est pas ce qu'on attendait.
Cet élève a calculé les premiers termes de la suite jusqu'à observer des régularités dans l'écriture en numération décimale des termes de la suite. Ces observations l'ont amené à modifier quelque peu le sens de l'énoncé en : « Déterminer pour tout entier naturel *n l'écriture en numération décimale* de u_n en fonction de *n* », ce qui n'est pas tout à fait la même chose que « l'expression ».

Il fournit une démonstration certes artisanale mais convaincante de sa conjecture, basée sur des arguments recevables de numération (on ferme les yeux sur le « 20 qui se transforme en 02 »).

- Cet élève a su expérimenter et émettre une conjecture.
- Il est conscient de la nécessité de démontrer.
- Il sait conduire un raisonnement par récurrence (ses observations initialisent *de facto* son raisonnement et l'hérédité de la propriété conjecturée est correctement démontrée).

La difficulté rencontrée par cet élève est de donner un sens précis à ce qu'on entend par « expression en fonction de n ». Il faudrait avec cet élève faire la distinction entre « expression » et « écriture en numération décimale » de u_n (voir correction ci-dessous).

2. Une correction de l'exercice.

On s'appuie sur la production de l'élève 2, qui est ici un bon tremplin.

Comme lui, on peut observer à partir du rang 1 des régularités.

	A	B num	C	D	E
◆		=seq(k,k,0	=seqn(10*u(		
1	7	0	7.		
2	gjulia2016	1	52.		
3		2	502.		
4		3	5002.		
5		4	50002.		
6		5	500002.		
7		6	5000002.		
8		7	50000002.		
9		8	500000002.		
10					
11					
A3					

On observe d'abord que les premiers termes sont des entiers naturels (Les u_n le sont-ils tous ? … Pourquoi ? …).

On observe ensuite que l'écriture décimale de u_n s'engraisse à chaque étape d'un nouveau zéro.

Pour autant, la conclusion de l'élève 2 n'est pas entièrement satisfaisante. Il reste comme on l'a dit à faire la distinction entre « écriture décimale » et « expression ».

Pour cela, on peut demander aux élèves ce que signifie « il y a $(n-1)$ zéros entre le 5 et le 2 ».

On fait le lien avec l'écriture canonique :
Dire que u_n s'écrit $\overline{500...02}$ avec $(n-1)$zéros avant le chiffre des unités revient à dire que l'écriture canonique de u_n est : $u_n = 5\times10^n + 2$. On a maintenant une *expression* de u_n en fonction de n qui, on le notera au passage, fonctionne aussi pour l'indice zéro alors que la forme proposée de l'écriture décimale ne fonctionne plus, comme l'a remarqué l'élève 2.

Il reste à démontrer par récurrence que cette expression (pour le moment conjecturée) est bien exacte pour toute valeur de l'entier naturel n. L'hypothèse d'initialisation étant abondamment pourvue (et ce dès le rang zéro), il suffira de démontrer l'hérédité de la formule proposée, ce qu'on propose aux élèves de faire.

3. Commentaire

.Délibérément, j'ai choisi de ne pas traiter l'exercice en suivant la méthode habituelle. Il est évidemment possible de le faire, il est même probable $_{gj}$ que c'est ce que le jury attend d'un candidat :

- Une « aide » que l'on pourrait apporter à l'élève 2 serait en effet de lui suggérer de s'intéresser à la suite $(u_n - 2)$. Ce qui a pour effet de se débarrasser de l'encombrant chiffre des unités. Une conjecture intéressante est alors : « $u_n - 2$, c'est cinq fois une puissance de dix » et plus précisément : $u_n - 2 = 5\times 10^n$. De plus, jackpot, cela fonctionne pour l'indice zéro.
- La suite de terme général $u_n - 2$ ne serait-elle pas par hasard une suite géométrique ?

On rejoint ainsi la méthode habituelle. $\alpha = 2$ est bien le point fixe de la fonction affine $x \underset{gjulia2016}{\mapsto} 10x - 18$ et la solution de l'équation $x = 10x - 18$. La suite $(u_n - 2)$ est bien une suite géométrique de raison 10 et l'expression du terme u_n en fonction de n est bien donnée par la relation : $u_n - 2 = (u_0 - 2)\times 10^n$.

Au lecteur de choisir sa voie.