ESD 2016_03 : Géométrie dans l'espace

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

L'espace est rapporté à un repère $\left(O;\,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
Dans ce repère, on définit les quatre points $A(1;2;3)$, $B(2\,;-1;0)$, $C(0;-3;1)$ et $D(-1;0;2)$. Les droites (*AB*) et (*CD*) sont-elles sécantes ?

B. Les réponses proposées par trois élèves de terminale S

Elève 1

Je détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, vecteur directeur de la droite (AB) et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$, vecteur directeur de la droite (CD) : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas proportionnelles donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires. On en déduit que les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles. Alors les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Elève 2

J'ai utilisé un logiciel de géométrie dans l'espace. J'ai entré les coordonnées des points A, B, C, D puis j'ai tracé le plan ABC. Son équation est $9x-5y+8z=23$. Donc je peux dire que le D n'appartient pas au plan ABC.

Elève 3

J'écris une équation paramétrique de chacune des deux droites :

$$(AB)\begin{cases}x=1+t\\y=2-3t\\z=3-3t\end{cases},\ t\in\mathbf{R}\qquad\qquad (CD)\begin{cases}x=-t'\\y=-3+3t'\\z=1+t'\end{cases},\ t'\in\mathbf{R}.$$

$M(x;y;z)$ est un point d'intersection des deux droites si et seulement si ses coordonnées vérifient les deux équations. On obtient le système : $\begin{cases}1-t=-t'\\2-3t=-3+3t'\\3-3t=1+t'\end{cases}$.

Dans la première équation on a $t'=-1-t$ et en remplaçant dans la troisième on obtient $3-3t=1-1-t$ c qui donne $t=\dfrac{3}{2}$ et donc ensuite $t'=-\dfrac{5}{2}$. On peut maintenant calculer les coordonnées de M par exemple à partir de (AB) et on trouve $M\left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{5}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$. Les droites (AB) et (CD) sont donc sécantes en M.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions des trois élèves en mettant en évidence les compétences mobilisées et les erreurs éventuelles.

2. Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale S, en vous appuyant sur les productions des élèves.

3. En motivant vos choix, proposez deux ou trois exercices sur le thème *géométrie dans l'espace*.

2. Eléments de correction

Cet exercice est un exercice d'entraînement exploitant l'outil de la géométrie analytique de l'espace (intersections de droites et de plans de l'espace). Il donne l'occasion à l'enseignant de montrer, par un contre exemple, que des droites de l'espace peuvent être à la fois non parallèles et non sécantes.

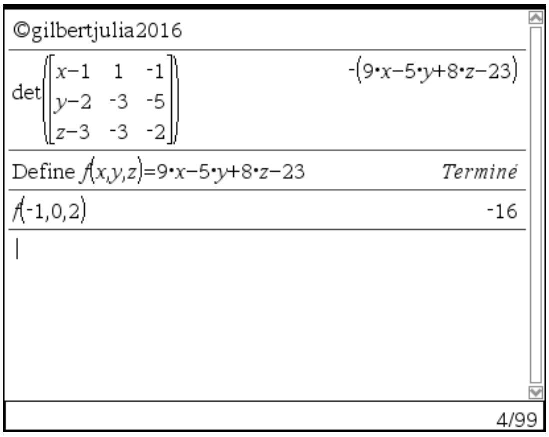
1. Analyse des travaux d'élèves.

Elève 1.
Réponse incorrecte.
Cet élève détermine un vecteur directeur de chaque droite *gj* 2016 et conclue correctement à la non colinéarité de ces deux vecteurs.

Il emploie ensuite un théorème-élève, consistant à utiliser un théorème vrai dans un certain domaine en dehors de son domaine d'application. Il transfère dans le domaine de la géométrie dans l'espace un théorème de géométrie plane. Selon lui, dans l'espace comme dans le plan, « deux droites non parallèles sont des droites *gj* sécantes ».
Cet élève sait déterminer les coordonnées d'un vecteur de l'espace (savoir faire) et caractériser par une propriété de proportionnalité des coordonnées la colinéarité ou la non colinéarité de deux vecteurs de l'espace (savoir).

Chouquerouste.
Le membre de la fratrie Chouquerouste qui est en terminale S. Ce n'est pas mal ce qu'il a fait aujourd'hui. Solution correcte et très intéressante mais cependant inaboutie.

Cet élève est représentatif d'une utilisation « à bon escient » d'un outil logiciel et fait preuve à ce titre d'une véritable compétence. Il délègue en effet le soin à son logiciel de géométrie de déterminer une équation cartésienne (automatisée) du plan (*ABC*) et vérifie implicitement si les coordonnées du point *D* vérifient ou non cette équation.



L'équation obtenue est bien correcte.

En même temps, on teste ci-contre si les coordonnées de D vérifient ou non l'équation du plan (ABC).

On peut qualifier d'inaboutie la production de Chouquerouste car il n'a pas établi explicitement la connexion entre « le point D n'appartient pas au plan ABC », ce qu'il n'a d'ailleurs pas justifié noir sur blanc, et « les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes ». Il semble que cette connexion soit évidente pour lui (il faudrait lui faire préciser).

Chouquerouste a su s'engager dans une démarche pertinente et utiliser à bon escient un outil logiciel. Il a donc su modéliser, représenter et raisonner. En revanche, son argumentation mathématique est incomplète, il n'a pas su communiquer.

Il faudrait attirer l'attention de cet élève sur la nécessité de répondre clairement à la question posée. La conclusion devrait être : « les droites (AB) et (CD) sont sécantes » ou bien « les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes ». Le fait que D n'appartient pas au plan (ABC) n'est pas une conclusion, il doit établir formellement la connexion.

Elève 3.
Réponse incorrecte.
Cet élève est cependant représentatif d'une démarche attendue. Il détermine correctement des équations paramétriques des deux droites et cherche de façon pertinente s'il existe un point dont les coordonnées vérifient à la fois les deux systèmes d'équations paramétriques. Il est ainsi amené à résoudre un système de trois équations à deux inconnues. Il utilise deux des équations pour déterminer des valeurs de t et t' susceptibles d'être solutions. Son erreur consiste à ne pas vérifier que ces valeurs sont compatibles avec la troisième équation.

Cet élève a su traduire en langage mathématique une situation réelle (à l'aide d'équations), choisir un cadre (algébrique) pour représenter un objet géométrique (droites de l'espace). Il sait effectuer des inférences pour obtenir de nouveaux résultats (caractériser un point d'intersection) et élaborer un raisonnement structuré.
Il n'a pas su contrôler ses calculs.
Il a su modéliser, représenter, raisonner mais non calculer.

Il faudrait proposer à cet élève de vérifier quand même « pour plus de sûreté » si on trouve le même point M « à partir de la droite (CD) ». Il utiliserait cette fois $t' = -\dfrac{5}{2}$ et obtiendrait $M\left(\dfrac{5}{2}\,;\,-\dfrac{21}{2}\,;\,-\dfrac{3}{2}\right)$.
« Mystérieusement, on n'obtient pas la même ordonnée qu'avec la droite (AB). Tu peux expliquer ce mystère ? »

2. Une correction pourrait s'appuyer sur les productions des élèves 2 et 3, mais davantage sur celle de l'élève 3. En confrontant leurs conclusions, on observe deux conclusions opposées. Qui a raison ?

- On revient sur la notion de représentation paramétrique d'une droite de l'espace en reprenant les deux représentations trouvées par l'élève 3. On fait remarquer en filigrane de ces représentations le rôle des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ (que l'élève 1 a obtenues) comme coefficients de t et de t'. Insister aussi sur la nécessité de nommer différemment les paramètres des deux représentations (ce que l'élève 3 a bien compris) : t et t' par exemple ou bien t et u.

- Pour obtenir les coordonnées d'un éventuel point d'intersection, on doit résoudre alors un système de TROIS équations à DEUX inconnues seulement. On détermine des éventuelles solutions en exploitant deux des équations, mais il est important de vérifier leur *compatibilité* avec la troisième équation restée en réserve. En l'occurrence, on observe ici une non compatibilité. Les deux droites n'ont aucun point commun, elles sont donc gj 2016 non sécantes.
- Quel rapport avec le fait que *D* n'appartient pas au plan (*ABC*) ? On fait remarquer que, si deux droites (*AB*) et (*CD*) sont sécantes, alors les quatre points *A*, *B*, *C*, *D* sont coplanaires. Les quatre points sont en effet dans le plan passant par le point d'intersection et contenant par exemple *A* et *C*. En contraposant la proposition, si *A*, *B*, *C*, *D* ne sont pas coplanaires, alors les deux droites (*AB*) et (*CD*) ne sont pas sécantes. C'est cette contraposition qui faisait défaut à la production de l'élève 2.

En synthèse, on fait remarquer que, dans l'espace, il peut y avoir des droites qui ne sont ni parallèles ni sécantes, ce sont des droites non coplanaires. Pour déterminer si deux droites (*AB*) et (*CD*) ont ou non un point d'intersection gj 2016 on peut :

- Déterminer des représentations paramétriques des deux droites et vérifier s'il existe un point dont les coordonnées vérifient les deux systèmes d'équations paramétriques. Pour cela, on résout un système de trois équations à deux inconnues dont il faut vérifier la compatibilité.
- Chercher une équation du plan (*ABC*) ce qui est facile si l'on dispose d'un logiciel de géométrie dans l'espace et vérifier si *D* appartient à ce plan. Cette démarche est particulièrement favorable si les droites sont non coplanaires. Elle présente l'inconvénient de ne pas déterminer le point d'intersection si les droites sont sécantes.

3. Voir REDCM 68 à 74 (mais les programmes en géométrie ont changé depuis)

3. Commentaires

1. Ce type d'exercice présente certes l'inconvénient de « balancer » les coordonnées des quatre points *A*, *B*, *C*, *D* tout à fait artificiellement. Il n'en est pas moins nécessaire dans l'apprentissage de la géométrie analytique dans l'espace et de ses liens avec la résolution de systèmes d'équations linéaires.

L'enseignant peut éventuellement choisir de présenter gj 2016 l'exercice en projetant une figure faite au préalable par un logiciel de géométrie affichant les quatre points avec leurs coordonnées. On « voit » sur la perspective un point d'intersection des projetées de (*AB*) et de (*CD*) sur l'écran. Ce point résulte-t-il d'un effet de perspective ou bien est-ce le projeté d'un vrai point d'intersection ? Pour répondre à la question, on suivra plutôt la démarche de l'élève 2 si l'on dispose d'un logiciel et plutôt celle de l'élève 3 si l'on n'en dispose pas. À mon avis, il serait mieux de ne pas en disposer, mais cet avis n'engage que moi.

2. L'attitude de Chouquerouste (certainement fictif …) est une sorte d'attitude « idéale » que l'on attendrait d'un élève friand de numérique. Il utilise son logiciel comme un outil, c'est lui qui reste maître du jeu. C'est lui commande au logiciel de lui donner une équation cartésienne du plan *ABC* parce qu'il considère que cette équation lui sera utile. Il n'est pas spectateur et ne fait pas de « constat », attitude récurrente dans d'autres sujets de cette session 2016 (et des sessions antérieures). Le jury a seulement pris soin de retirer un passage clef du raisonnement attendu pour donner aux candidats l'occasion de le rétablir.