ESD 2015 –20 : Optimisation

1. Le sujet

A. L’exercice proposé au candidat

Dans un repère, on considère la courbe représentative de la fonction f définie sur **R** par $f(x)=\dfrac{2x^2}{9}-8$

A et B sont les points de cette courbe d’abscisses respectives −6 et 6.
Le point P est un point variable sur cette courbe, d’abscisse a comprise entre −6 et 6.
Le point H a pour coordonnées $(a\ ;\ 0)$. L’aire du triangle APH admet-elle un maximum ?

B. Les réponses de deux élèves de première

Élève 1

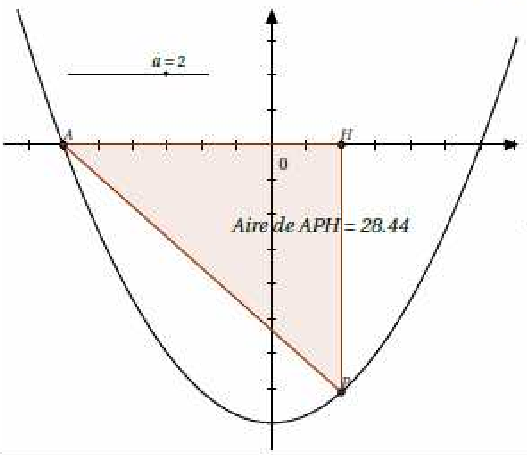
Soit $\mathcal{A}(a)$ *l’aire de* APH.

$\mathcal{A}(a)=\dfrac{HP\times AH}{2}=\dfrac{f(a)\times(a-(-6))}{2}$.

On trouve $\mathcal{A}(a)=\dfrac{1}{9}a^3+\dfrac{6}{9}a^2-4a-24$.

Je trace la courbe à la calculatrice, je ne trouve que des valeurs négatives. Il doit y avoir une erreur.

Élève 2



J’ai fait une construction sur le logiciel, et j’ai trouvé un maximum de 28,44 pour a = 2.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et la pertinence de leur démarche.

2. Proposez une correction de l’exercice telle que vous l’exposeriez devant une classe de première, en vous appuyant sur les différentes productions d’élèves.

3. Présentez deux ou trois exercices sur le thème optimisation. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

2. Eléments de correction

L'exercice présente un problème de maximisation d'une aire. La situation est construite pour conduire à l'étude d'une fonction polynôme du troisième degré. L'énoncé appelle deux remarques :

- L'énoncé fait référence à « un repère » sans en préciser la nature. Implicitement, il s'agit d'un repère orthonormal, mais ce serait mieux en le disant.
- Il est assez ballot de vouloir proposer aux élèves l'étude d'une fonction du troisième degré mais de se débrouiller pour que le maximum soit atteint en une valeur très simple, en l'occurrence $a = 2$, que les élèves peuvent facilement « deviner ». La production de l'élève 2 en est un exemple caractéristique.

1. On retrouve dans ce sujet deux personnages déjà rencontrés dans des sujets similaires (voir ces sujets).

Elève 1.
Cet élève incarne celui qui a su proposer une modélisation pertinente mais qui n'a pas su la faire aboutir.
La raison de son échec est que cet élève a confondu la mesure algébrique $f(a) = \overline{HP}$ avec la longueur $|f(a)| = HP$ du segment [*HP*]. Il a été alerté par la négativité de l'expression de l'aire qu'il a obtenue (donc, il a su déceler une erreur et mettre en cause son résultat) mais il n'a pas su corriger son erreur.

Tout traitement mathématique ultérieur est de ce fait avorté (il aurait été intéressant de savoir ce qu'il envisageait de faire après « avoir tracé la courbe à la calculatrice », mais ça, on ne le saura jamais).

Pour aider cet élève à corriger son erreur, on pourrait lui demander de considérer la même construction avec la courbe symétrique de celle qui représente *f* par rapport à l'axe *Ox* (donc représentative de la fonction $-f$) et d'examiner « ce qui change » et « ce qui reste inchangé ».

Elève 2
Cet élève incarne le partisan du « je-vois-que », celui qui sait construire une figure dynamique mais qui en reste au niveau du « constat » sans qu'aucune réflexion mathématique ne vienne étayer ce qui n'est qu'une conjecture. On ne peut pas accorder une certaine « pertinence » à ce genre de démarche.

Il a deviné la valeur de *a* pour laquelle l'aire du triangle est maximale, mais n'a pas obtenu la valeur exacte de cette aire (ce qu'on peut lui demander pour l'inciter à réfléchir …).

2. ***Option 1***
Une première option de correction consisterait à suivre la modélisation de l'élève 1 et à garder le travail de l'élève 2 pour valider les résultats.
On fait la distinction entre $x_P - x_H$ qui est négatif car la courbe représentative de *f* est au dessous de l'axe *Ox* et $HP = |x_P - x_H| = x_H - x_P$ ce qui amène à corriger l'expression de l'aire du triangle en : $A(a) = (a+6)\times(-f(a)) = -\dfrac{a^3}{9} - \dfrac{2a^2}{3} + 4a + 24$, définie lorsque $a \in [-6\ ;+6]$.
On peut faire remarquer l'expression factorisée : $A(a) = (a+6)^2 \times (6-a)$.
L'étude des variations sur $[-6\ ;+6]$ de la fonction aire se fait avec l'outil de la dérivée. Il n'y a pas lieu de faire appel à un logiciel de calcul formel pour traiter une fonction polynôme du troisième degré. C'est précisément un objectif de la classe de première que de savoir utiliser la fonction dérivée dans des circonstances semblables. On pourra comparer deux façons de dériver :

- À partir de l'expression développée : $A'(a) = -\dfrac{a^2}{3} - \dfrac{4a}{3} + 4$
- À partir de l'expression factorisée : $A'(a) = -(a+6)^2 + 2(a+6)(6-a) = (a+6)(6-3a)$, façon plus performante car ce qui nous intéresse, c'est d'obtenir le signe de la fonction dérivée.

On conclut que le triangle a une aire maximale lorsque $a=2$, cette aire est alors égale à $\frac{256}{9}$ unités d'aire.

Le travail de l'élève 2 va servir pour valider ce résultat. Il illustre la synthèse que l'on peut faire de l'exercice : 28,44 est une valeur approchée au centième de la valeur exacte obtenue par l'étude mathématique.

Option 2

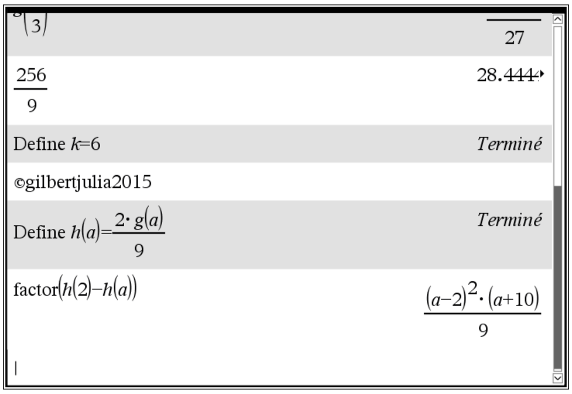
On inverse l'exploitation des travaux des élèves. Une expérimentation préalable comme celle de l'élève 2 montre que : « il semble bien que l'aire soit maximale quand $a=2$. Mais c'est une conjecture et nous devons nous donner les moyens de démontrer (ou d'invalider) cette conjecture. Comment s'y prendre ? ».

L'élève 1 nous fournit une modélisation adéquate (une fois rectifié le signe de l'expression de l'aire) :
$A(a)=(a+6)\times(-f(a))=-\frac{a^3}{9}-\frac{2a^2}{3}+4a+24$.

Dans cette option, il n'est pas utile de faire appel à une étude de variations. Il est préférable de travailler sur le signe de $A(2)-A(a)=\frac{a^3}{9}+\frac{2a^2}{3}-4a+\frac{40}{9}$, expression qui par construction est factorisable par $(a-2)$.

Elle l'est par $(a-2)^2$: $A(2)-A(a)=\frac{a+10}{9}(a-2)^2$.

En conséquence, $A(2)-A(a)\geq 0$ quel que soit $a\in[-6\ ;+6]$. On conclut qu'en effet l'aire du triangle est maximale lorsque $a=2$



3. Pour aller plus loin

La fonction f proposée par cet énoncé peut s'exprimer ainsi : $f(x)=-\frac{2}{9}(36-x^2)$. La parabole **C** représentative de f est l'image par la réflexion s d'axe Ox de la parabole $\mathbf{C_1}$ d'équation : $y=\frac{2}{9}(36-x^2)$, elle-même image par l'affinité orthogonale φ d'axe Ox et de rapport $\frac{2}{9}$ de la parabole $\mathbf{C_2}$ d'équation : $y=36-x^2$.

Le triangle APH a une aire maximale lorsque son triangle image par $s^{-1}\circ\varphi^{-1}$ a lui-même une aire maximale. En appelant P_2 l'image de P par $s^{-1}\circ\varphi^{-1}$, maximiser l'aire de APH revient à maximiser celle de AP_2H, laquelle est égale à $\frac{1}{2}(a+6)(36-a^2)$

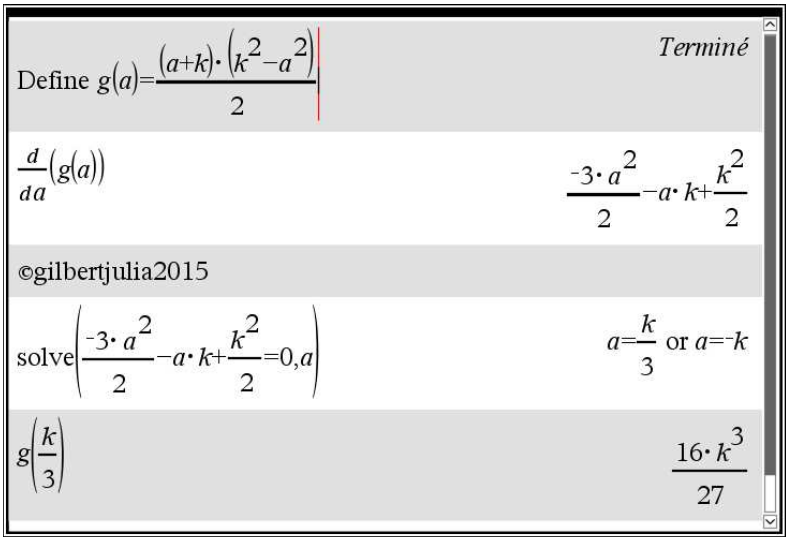
On peut dès lors se demander ce qu'il se passe, en règle générale, si on remplace dans l'exercice f par la fonction définie par : $f(x)=k^2-x^2$ définie sur l'intervalle $[-k\ ;+k]$, où k désigne un nombre réel strictement positif.

L'aire du triangle APH est dans ce cas :

$A(a)=\frac{1}{2}(a+k)(k^2-a^2)$.

Une étude sommaire de la fonction aire montrerait que l'aire est maximale lorsque $a=\frac{k}{3}$

Ce maximum est égal à $\frac{16k^3}{27}$



Lorsque $k=6$, le triangle AP_2H d'aire maximale a pour aire 128 unités d'aire. Son triangle image par $\varphi \circ s$ a pour aire $\frac{2}{9}\times 128=\frac{256}{9}$ unités d'aire. On retrouve le résultat de l'exercice.

3. Commentaires

1. Le choix des coefficients $\frac{2}{9}$ et 8 est discutable.

Passons sur le fait que, avec une courbe sous l'axe Ox, il faut penser à changer le signe devant $f(a)$ (ce qui a provoqué l'erreur de l'élève 1 et l'a empêché d'aller plus loin) ; on peut, pourquoi pas, se proposer de travailler ce point.

Ils apporteraient quelque chose si la valeur de a rendant l'aire maximale était un peu plus difficile à découvrir que $a=2$. Dans le cas présent, ce n'est pas le cas, une expérimentation « au logiciel » rend évidente cette valeur de a et désamorce l'intérêt que l'on peut accorder à la situation.

À quoi bon faire une étude détaillée si on connaît d'avance la réponse ? C'est la raison pour laquelle, dans la première option de correction destinée à une classe de première, une expérimentation comme celle de l'élève 2 n'est pas prévue et ne vient qu'après l'étude mathématique. Pour ma part, je préfère d'ailleurs cette première option à la deuxième proposée car elle permet de travailler avec l'outil de la dérivée, notion centrale en classe de première.

Il semble que la situation ne perdrait pas en intérêt si on considérait à la place de la fonction f de l'énoncé une fonction du genre : $f(x)=25-x^2$ par exemple.

2. La récurrence du style de travaux d'élèves mis en scène interpelle. L'un d'entre eux modélise mais n'aboutit pas, un autre expérimente au logiciel et « constate » sans aller plus loin. Il est clair que le jury du CAPES veut connaître la réaction des candidats face à ces profils d'élèves.

Les candidats ont tout intérêt à travailler ce point avec leurs préparateurs. Jusqu'à quel point faut-il accorder crédit à une résolution « logicielle » ? Quelle « compétence » accorder à un élève qui met en œuvre une telle démarche ? Voilà qui mérite discussion.

Pour ma part, mon avis, qui n'engage que moi, est sans concession. Ce n'est pas faire des mathématiques que de constater ce qu'il se passe sur un écran. Aucune « compétence » n'est ainsi mise en évidence.

Il appartient au professeur de mathématiques d'apprendre aux élèves à distinguer ce qu'on prouve de ce qu'on conjecture, et cette distinction est capitale (elle devrait l'être plus généralement dans la formation citoyenne). Voici un beau sujet à controverse …