ESD 2015 – 19 : Probabilités

Voici un sujet où une des questions posées par le jury a de quoi déconcerter les candidats …

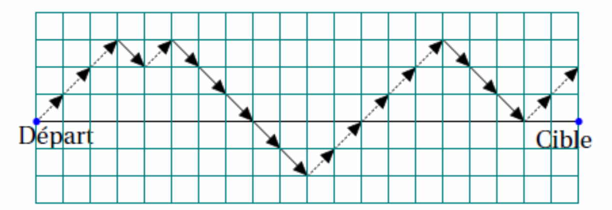
1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Le robot Tom doit atteindre une cible située face à lui. Sa démarche est particulière :

- Soit il se déplace d'un pas en diagonale vers la gauche.
- Soit il se déplace d'un pas en diagonale vers la droite.

On suppose que ces deux types de déplacement sont aléatoires et équiprobables et que le robot Tom effectue exactement 20 pas. La figure ci-contre illustre un déplacement de trois pas à gauche, puis un à droite, un à gauche, cinq à droite, cinq à gauche, trois à droite et enfin deux à gauche. Le robot Tom n'a pas atteint ici la cible.



1. Après avoir mis en place une simulation de cette marche aléatoire, donner une approximation de la probabilité p que le robot atteigne la cible.

2. Déterminer la valeur exacte de p ainsi que sa valeur arrondie au millième, puis confronter le résultat avec celui de la première question. (*D'après un sujet de baccalauréat*.)

B. Les réponses de deux élèves à la question 1

```
Affecter à N la valeur 0
pour j allant de 1 à 10000 faire
|  Affecter à D la valeur 0
|  pour k allant de 1 à 20 faire
|  |  A prend la valeur aléatoire 0 ou 1
|  |  si A = 0 alors
|  |  |  D prend la valeur D + 1
|  |  fin
|  fin
|  si D = 10 alors
|  |  N prend la valeur N + 1
|  fin
fin
Afficher N/10000
```

Élève 1
En utilisant cet algorithme un grand nombre de fois, j'obtiens un affichage toujours compris entre 0,17 et 0,18.
Donc la probabilité p est comprise entre 0,17 et 0,18.

Élève 2
J'ai simulé 100 marches aléatoires à l'aide du tableur, j'obtiens une probabilité de rejoindre la cible égale à 0,21. J'ai appuyé environ une centaine de fois sur la touche F9 et j'ai observé très rarement des probabilités en dehors de [0,10 ; 0,25]. Donc la probabilité p cherchée est comprise entre 0,10 et 0,25.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites.

2. Présentez une correction de la question 2 telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique

3. Proposez deux exercices sur le thème probabilités. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

2. Eléments de correction

L'exercice porte sur la notion d'intervalle de confiance.
Le jury demande étrangement de « corriger la question 2 » et, par-dessus le marché « devant une classe de première scientifique ». Ha bon ? Et comment on fait ? En effet :

- La notion d'intervalle de confiance n'apparaît qu'en terminale. En première S, il est question d'intervalle de fluctuation.
- La correction de la question 2 dépend étroitement de la conclusion qui a été tirée de la question 1. Or, les informations que l'on peut déduire des documents « travaux d'élèves » sont clairement insuffisantes pour bâtir une correction.

Le caractère étudié dans l'exercice est le fait de faire autant de pas vers la droite que de pas vers la gauche lors d'une marche aléatoire de 20 pas, les deux directions étant équiprobables. Soit p la probabilité de ce caractère.

Dans la première question, la probabilité p n'est pas connue. L'objectif est de donner une estimation de p à l'aide d'une simulation et de proposer un intervalle dans laquelle on peut affirmer que p se trouve, à un seuil de probabilité déterminé (en principe 95 %). Il s'agit là d'un intervalle de confiance.

Dans la deuxième question, on calcule p. Il s'agit de situer p par rapport aux intervalles de confiance obtenus dans la première question. Encore faut-il en disposer …

1. On attend donc dans la question 1 la mise en place d'un intervalle de confiance. Aucune des deux productions (dont on ne connaît pas le niveau de classe, cela devrait être terminale) n'y parvient de façon justifiée.

<table>
<tr><td>Elève 1</td><td>Elève 2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ils ont compris le sens de « mettre en place une simulation ». Ils ont tous deux compris qu'il s'agissait de simuler une répétition d'expériences identiques et indépendantes (que l'élève 1 explicite).</td></tr>
<tr><td>Programme un algorithme avec un compteur et une boucle conditionnelle. Ce programme lui permet de construire un échantillon de taille 10000.</td><td>Simule 100 expériences identiques et indépendantes, chacune occupant certainement une ligne de son tableur. L'ensemble des 100 lignes lui fournit un échantillon de taille 100.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Proposent tous les deux un intervalle dans lequel p devrait se trouver</td></tr>
<tr><td>Justifié par le fait que, « un grand nombre de fois », la fréquence observée est « toujours dans l'intervalle ». Cette affirmation est peu plausible, on peut soupçonner une arnaque.</td><td>L'intervalle proposé est élagué de valeurs considérées comme « rares ».</td></tr>
<tr><td></td><td>Confond la notion de fréquence observée (ce qu'il obtient en expérimentant) et celle de probabilité. Il faudra rectifier ce vocabulaire incorrect.</td></tr>
</table>

En résumé, côté « réussites » :

- L'élève 1 fait preuve de connaissances en algorithmique (contrairement à l'élève 2).
- Les deux élèves ont tous deux la notion de fluctuation et de « fourchette » dans laquelle p devrait se trouver.
- La fourchette proposée par l'élève 2 est en cohérence avec la taille de l'échantillon qu'il a étudié (on ne peut en dire autant de l'élève 1).
- L'élève 2 a une idée intuitive de valeurs aberrantes (contrairement à l'élève 1) donc de seuil d'acceptation.

Ils sont en échec lorsqu'il s'agit de justifier avec précision l'approximation de p qu'ils proposent.

Lors de la correction de cette question, il faudra mettre l'accent sur le côté subjectif du choix des bornes des intervalles retenus par les deux élèves et sur la nécessité de mesurer de façon impartiale la qualité d'une approximation (c'est-à-dire définir des normes régulant le choix d'une fourchette : établir des critères de « rareté » pour aboutir à la notion d'intervalle de confiance à un seuil de confiance donné (95 %).

2. On met en place une variable aléatoire X indiquant le nombre de pas à droite (par exemple) lors d'une marche aléatoire de 20 pas. Cette variable aléatoire suit la loi binomiale $B\left(20,\frac{1}{2}\right)$. Eventuellement, on peut associer à X la variable aléatoire $Y = 20 - 2X$ qui indique l'ordonnée du point atteint par Tom au bout de 20 pas, mais ce n'est pas indispensable.
L'évènement « Tom atteint la cible » est l'évènement « $X = 10$ »

$p = P(X = 10) = \binom{20}{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = \frac{46189}{262144}$. La valeur arrondie au millième de cette probabilité est $0{,}176$.

La logique de l'exercice voudrait que cette valeur de p, arrondie au millième, soit située relativement aux intervalles de confiance retenus à l'issue de la correction de la question 1. On remarque que la valeur 0,176 appartient bien aux intervalles proposés par chacun des deux élèves (ce qui est normal et ne valide pas pour autant les intervalles des deux élèves). Mais ces intervalles ont été choisis empiriquement. L'élève 1 ne nous dit rien de la série des affichages qu'il a obtenus. Nous ne connaissons pas non plus quelles sont les valeurs considérées comme « rares » par l'élève 2. Dès lors, il est bien compliqué de corriger cette question 2 …

3. Pour aller plus loin

Une façon de corriger l'exercice est de créer une opposition entre la situation étudiée dans la question 1 et celle étudiée dans la question 2. Il semble que ce soit peut-être la correction attendue par le jury (?).

Comme je l'ai souligné, la question 1 devrait aboutir à l'observation d'une fréquence f du caractère étudié au cours d'une simulation, puis à la détermination d'un intervalle $[f - h_\alpha \;;\; f + h_\alpha]$ centré en f auquel appartient la probabilité (inconnue) p, avec une probabilité au moins égale au seuil α choisi.

Dans la question 2, la valeur exacte de p est maintenant connue. Il est dès lors possible de déterminer un *intervalle de fluctuation* d'une fréquence observée autour de p, à un seuil de probabilité donné (95 % en principe).

Cela revient à inverser la problématique : « Voyons si notre simulation a donné un résultat plausible, ou bien si quelque chose a faussé l'expérimentation ».

Comment déterminer un tel intervalle ?
On ne procèdera pas de même suivant que l'échantillon considéré est de taille n, entier dont l'ordre de grandeur est 100 (comme l'élève 2) ou entier dont l'ordre de grandeur est 10000 (comme l'élève 1).

Cas d'un échantillon dont l'ordre de grandeur de la taille n est 10000.

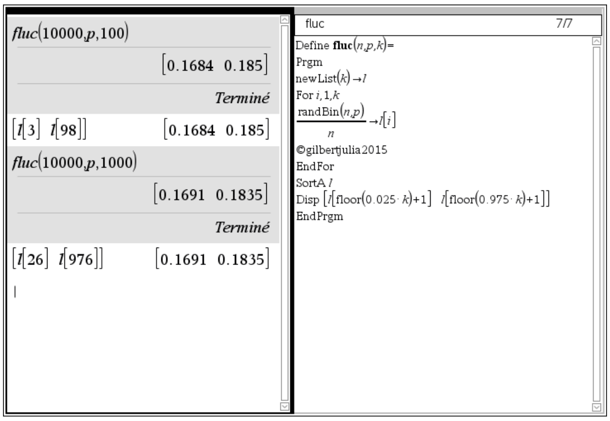
L'intervalle de fluctuation asymptotique $\left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \;;\; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ serait bien adapté (ici c'est l'intervalle $[0{,}168 \;;\; 0{,}184]$) mais ne sera vu qu'en terminale.

Par ailleurs, la taille de l'échantillon est trop élevée pour envisager une construction par la loi binomiale.

Peut-être convient-il de commencer par rappeler la notion d'intervalle de fluctuation tel qu'il a été défini en classe de seconde : « si f désigne la fréquence du caractère dans l'échantillon, f appartient à l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} \;;\; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité d'au moins 0, 95 ». Dans le cas présent, cet intervalle est $[0{,}166 \;;\; 0{,}187]$.

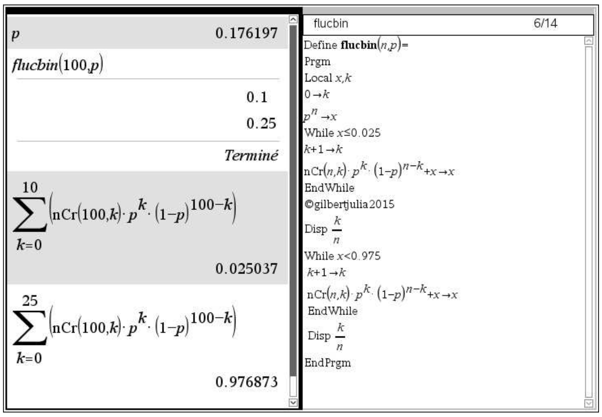
Mais on rappelle que cet intervalle n'est considéré comme fiable que si si $n \geq 25$ et $0{,}2 \leq p \leq 0{,}8$. Or, ici la condition de fiabilité portant sur la probabilité n'est pas respectée puisque $p < 0{,}2$. Il est légitime de dire aux élèves que p est quand même assez voisin de 0,2 et l'échantillon est de grande taille, ce qui assure une bonne fiabilité (ou bien d'évoquer les conditions $n\,p > 5$; $n(1-p) > 5$, conditions ici largement remplies). Et de s'en tenir là.

On peut aussi proposer la construction d'un intervalle de fluctuation approché à l'aide d'une simulation :



Le programme **fluc** est affecté de trois arguments. L'entier n est la taille de l'échantillon. Le réel p est la probabilité du caractère étudié. L'entier k est le nombre de répétitions de l'expérience (k remplace le « (en utilisant cet algorithme) un grand nombre de fois » de l'élève 1 et « J'ai appuyé environ une centaine de fois sur la touche F9 » de l'élève 2.
Ce programme construit une liste ordonnée de résultats et renvoie la première fréquence dont l'indice est $> 0{,}025k$ et la première fréquence dont l'indice est $\geq 0{,}975k$
On obtient par exemple l'intervalle $[0{,}1691;\ 0{,}1835]$

Cas d'un échantillon dont l'ordre de grandeur de la taille n est 100.
On est en mesure de déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % à l'aide de la loi binomiale elle-même.



Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(n, p)$ où l'ordre de grandeur de n est au plus celui des centaines :
On construit à l'aide de la loi binomiale un intervalle $\left[\frac{a}{n}\,;\,\frac{b}{n}\right]$ tel que :
a est le plus petit entier vérifiant $p(X \leq a) > 0{,}025$
b est le plus petit entier vérifiant $p(X \leq b) \geq 0{,}975$

4. Commentaires

1. Pour des raisons différentes, les deux élèves semblent être des élèves fictifs dont les productions ont été, comme le robot Tom, fabriquées de toutes pièces :

1.1. L'affirmation « En utilisant cet algorithme un grand nombre de fois, j'obtiens un affichage toujours compris entre 0,17 et 0,18 » de l'élève 1 est plus que suspecte.

En effet soit F la variable aléatoire égale à la fréquence observée. F suit grosso modo la loi $N\left(p, \frac{\sqrt{p(1-p)}}{100}\right)$ qui est une bonne approximation de la loi binomiale $\frac{1}{10000}B(10000, p)$ et $G = \frac{100}{\sqrt{p(1-p)}}(F - p)$ suit grosso modo la loi $N(0,1)$.
On obtient que : $G < -1{,}63 \Rightarrow F < 0{,}17$ et d'après une table de loi normale centrée réduite $p(G < -1{,}63) = 0{,}0516$
De même : $G > 1 \Rightarrow F > 0{,}18$ et d'après une table de loi normale centrée réduite $p(G > 1) = 0{,}1587$.

Les fréquences de l'élève 1 auraient dû être inférieures à 0,17 dans à peu près 5 % des cas et dépasser 0,18 dans à peu près 15 % des cas. S'il est sincère, l'élève a plutôt utilisé son algorithme « un petit nombre de fois ».

1.2. Quant à l'élève 2, il est étrange qu'il donne exactement le même intervalle que l'intervalle de fluctuation au seuil 95 %. On ne sait pas pourquoi il a choisi 0,1 et 0,25 comme bornes. En principe, ce n'est que pure coïncidence. La ficelle est un peu grosse.

2. Le sujet semble avoir été « inspiré » par un sujet posé dans l'académie Antilles / Guyane en septembre 2013. Mais « inspiré » est peut-être mal choisi, tant le sujet original a été dénaturé et vidé de son sens.
Car de deux choses l'une :

- Ou bien on est en mesure de calculer la probabilité d'un évènement et dans ce cas on le fait.
- Ou bien on n'a aucun moyen de la déterminer et dans ce cas on cherche à l'approcher.

Ici, on tente d'approcher une probabilité que l'on calcule ensuite. L'unique intérêt (qui d'ailleurs n'est pas à négliger) est de « tester les méthodes » et c'est ainsi que l'exercice peut être présenté aux élèves : « On va voir sur un exemple comment on estime une probabilité inconnue à partir d'un échantillon obtenu par une simulation, puis on va calculer cette probabilité et la situer par rapport à notre estimation pour voir si la méthode fonctionne bien ».