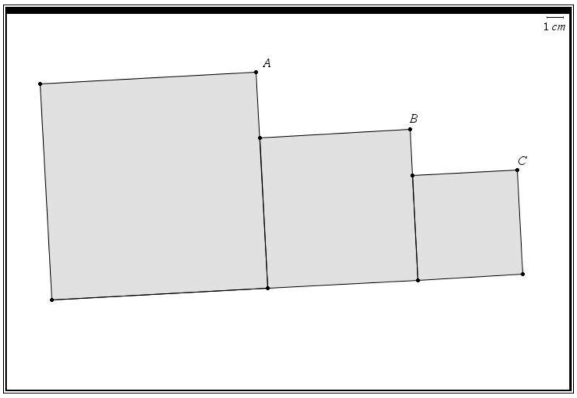
# ESD 2015 –18 : Problèmes avec prise d'initiative

## 1. Le sujet

### A. L'exercice proposé au candidat

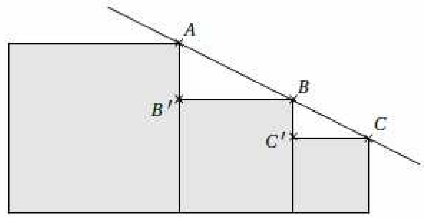
On considère la figure ci-contre formée de 3 carrés.
Le premier carré a pour côté 1.
Le côté du deuxième carré est une réduction du côté du premier carré et le côté du troisième carré est une réduction du côté du deuxième carré. Les deux coefficients de réduction sont égaux.
Les points $A$, $B$ et $C$ sont-ils alignés ?




### B. Les réponses de deux élèves de seconde

**_Élève 1_**

*J'ai placé $B'$ et $C'$ et j'ai tracé la droite $(AC)$.*
*Dans le triangle $BC'C$ rectangle en $C'$, les angles $\widehat{C'BC}$ et $\widehat{C'CB}$ sont complémentaires.*
*$\widehat{C'BB'} = 90°$ donc $\widehat{B'BA}$ est complémentaire à $\widehat{C'BC}$.*
*Ce qui fait que $\widehat{B'BA} = \widehat{C'CB}$.*
*Donc les coefficients directeurs sont égaux et les points A, B et C sont alignés.*




**_Élève 2_**

*On utilise les coordonnées des points A, B, C qui sont les longueurs des côtés des carrés.*
*On a $A(1;1)$, $B\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3}\right)$. Après j'utilise les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.*
*On regarde s'ils sont colinéaires : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$ où k est le coefficient mais je ne trouve pas.*

### C. Le travail à exposer devant le jury

**1.** Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs.

**2.** Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

**3.** Proposez deux exercices sur le thème *problèmes avec prise d'initiative* dont l'un au moins nécessite l'utilisation d'un logiciel. Vous motiverez vos choix en expliquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

## 2. Eléments de correction

Cet exercice entrerait aisément dans le thème « Etude de configurations ». Il s'agit d'un problème d'alignement qui peut être résolu par plusieurs méthodes. L'énoncé est ouvert et aucune piste de résolution n'est induite par l'énoncé. C'est sans doute la raison pour laquelle l'exercice est proposé en tant que « Problème avec prise d'initiative ».

**1.** *Elève 1*.
Cet élève complète de deux nouveaux points la figure proposée par l'énoncé et en extrait deux triangles rectangles. Il semble vouloir utiliser l'outil des angles pour démontrer l'alignement.
Le tracé de la droite ($AC$) qu'il a réalisé l'induit en erreur : Cette droite lui paraît passer par $B$ et il incorpore cette idée dans ses hypothèses, commettant ainsi une pétition de principe.
On peut soupçonner que l'exercice a été donné peu après une leçon sur la géométrie analytique, car selon cet élève, « les coefficients directeurs sont égaux » alors que rien ne vient justifier l'utilisation de « coefficients directeurs » à ce moment de la résolution. Il veut sans doute dire que dans un plan repéré, lorsque deux droites déterminent avec l'axe $Ox$ des angles (orientés … !) égaux, elles ont le même coefficient directeur. (On imagine qu'il serait en présence de deux droites passant par $B$ et de même coefficient directeur : elles seraient donc confondues)
Cet élève a changé d'outil de résolution mais sans que ni l'outil des angles, ni celui (hypothétique) de la géométrie analytique n'aboutisse à un résultat consistant.

*Elève 2*
Cet élève utilise clairement l'outil de la géométrie analytique. Il décrit une démarche correcte : calculer les coordonnées des points utiles dans un repère adapté, considérer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et vérifier si ces vecteurs sont colinéaires.
Il raisonne non pas en toute généralité (en désignant par une lettre le coefficient de réduction) mais sur la figure qu'il a sous les yeux, dans laquelle le coefficient de réduction est voisin de $\frac{2}{3}$, valeur numérique qu'il attribue à ce coefficient.
Cet élève semble être en échec lorsqu'il s'agit de calculer les coordonnées d'un vecteur (celles de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne figurent pas dans sa production) et, si ce n'est pas sur cet item, il est alors en échec lorsqu'il s'agit de caractériser analytiquement une colinéarité de deux vecteurs.

Les « réussites » que l'on peut relever en matière de prise d'initiative dans ces productions :

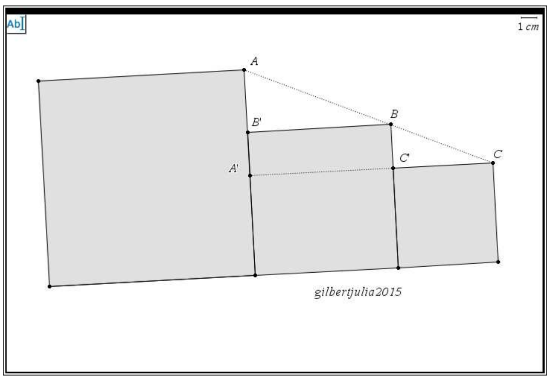
- Le fait de « voir » deux triangles rectangles de sommets désignés par $B'$ et $C'$ puis l'idée d'utiliser l'outil des angles pour l'élève 1.
- Le plan de résolution proposé par l'élève 2, que l'on pourra reprendre dans la correction.

**2.** Une correction s'appuie sur la production des deux élèves, en commençant par celle de l'élève 1.

Procéder à une analyse de la figure que l'on code en figurant les angles droits utiles et dont on extrait trois triangles rectangles $AA'C$, $AB'B$ et $BC'C$.

Tracer la droite ($AC$), mais bien souligner qu'on ne sait pas si le point $B$ appartient à la droite ($AC$) ou bien si ce n'est qu'une apparence trompeuse.

C'est précisément ce que l'on veut valider ou invalider.




Désigner par une lettre ($k$ par exemple, en supposant désormais $0 < k < 1$) le coefficient de réduction, ainsi on ne perd rien de la généralité de la démonstration. Les trois carrés ont pour côtés respectifs 1, $k$ et $k^2$.

Pour justifier l'alignement par une relation angulaire, on peut proposer deux options :

- Montrer que l'angle $\widehat{ABC}$ est un angle plat.
- Montrer que les angles $\widehat{A'AC}$ et $\widehat{A'AB}$ sont égaux.

L'idée est de justifier que les trois triangles rectangles *AA'C*, *AB'B* et *BC'C* sont semblables et ont des angles homologues égaux, en comparant les mesures de leurs côtés de l'angle droit :

| Triangle *AB'B* | Triangle *BC'C* | Triangle *AA'C* |
|---|---|---|
| $AB'=1-k$ et $B'B=k$ |  $BC'=k-k^2$ et $C'C=k^2$ | $AA'=1-k^2$ et $A'C=k+k^2$ |

Il apparaît que *BC'C* est une réduction de *AB'B* , le coefficient de réduction étant *k*, et aussi une réduction de *AA'C*, le coefficient de réduction étant $\dfrac{1}{1+k}$.

… (*à finaliser*)

Un outil nouveau en seconde est l'outil vectoriel et son application en géométrie analytique. Il s'agit de faire la promotion de ce nouvel outil, en suivant la démarche de l'élève 2 :

- Expliciter le repère que cet élève a utilisé (« on a le droit de choisir un repère qui facilite les calculs »).
- Il est préférable de désigner par *k* le coefficient de réduction (comme dans la méthode précédente) plutôt que de prendre un exemple (le coefficient $\dfrac{2}{3}$ est lu sur la figure mais n'est pas dans les hypothèses).
- Calculer les coordonnées des points utiles : $A(1\,;\,1)$ ; $B(1+k\,;\,k)$ ; $C(1+k+k^2\,;\,k^2)$.
- Faire rappeler comment on calcule les coordonnées d'un vecteur quand on connaît les coordonnées de son origine et celles de son extrémité. Ainsi ; $\overrightarrow{AB}(k\,;\,k-1)$ et $\overrightarrow{AC}(k+k^2\,;\,k^2-1)$.
- L'élève 2 a donné une condition de colinéarité (il existe un réel λ …). Comment s'exprime-t-elle analytiquement ? Ici, on note que :  $\begin{cases} x_{\overrightarrow{AC}} = k(1+k) = (1+k)x_{\overrightarrow{AB}} \\ y_{\overrightarrow{AC}} = (k-1)(k+1) = (1+k)y_{\overrightarrow{AB}} \end{cases}$. Les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ sont proportionnelles à celles de $\overrightarrow{AB}$, le coefficient de proportionnalité étant $1+k$. Les deux vecteurs sont colinéaires car $\overrightarrow{AC}=(1+k)\overrightarrow{AB}$, ce qui démontre l'alignement des points *A*, *B*, *C*.

Une alternative consiste à déterminer une équation cartésienne d'une droite passant par deux des trois points *A*, *B* ou *C* et à vérifier si les coordonnées du troisième point vérifie ou non l'équation de cette droite.

Par exemple, la droite (*AB*) a pour équation : $\begin{vmatrix} x-1 & k \\ y-1 & k-1 \end{vmatrix}=0$ c'est-à-dire $(k-1)x-k\,y+1=0$ et on vérifie si les coordonnées de *C* vérifient ou non cette équation.

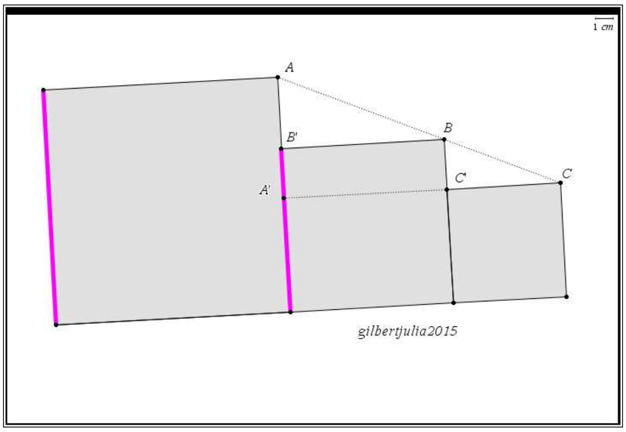
Un intérêt de cette option est de permettre la détermination du point d'intersection *I* de cette droite avec l'axe *Ox* : ce point a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{1-k}\,;\,0\right)$.

On peut ainsi proposer un prolongement : si on itère la construction de nouveaux carrés après le troisième, ces carrés ont tous un sommet aligné avec *A* et *I*. L'abscisse de *I* est le nombre $\dfrac{1}{1-k}$, limite de la somme des termes $1+k+k^2+...+k^n$ lorsque *n* tend vers l'infini, ce qui a ici une interprétation géométrique, tous les carrés s'inscrivent dans un triangle rectangle d'hypoténuse [*AI*].

Si on compare les deux démarches, la résolution par la géométrie vectorielle $_{gjulia2015}$ et la géométrie analytique est plus performante.

La résolution par l'outil des angles utilise en effet des angles géométriques, et la démonstration s'appuie au moins implicitement sur la figure (par exemple l'égalité des angles géométriques $A'\widehat{A}C$ et $A'\widehat{A}B$ à elle seule ne suffit pas, elle justifie que (*AB*) et (*AC*) sont ou bien symétriques par rapport à (*AA'*) ou bien confondues ; il faudrait ajouter que *B* et *C* sont d'un même côté de (*AA'*) pour lever toute ambiguïté).

## 3. Commentaires




Il existait jadis une élégante méthode démontrant l'alignement utilisant les transformations, une homothétie en l'occurrence.
Les deux segments colorés se correspondent par une homothétie de rapport positif *h* et il s'agissait de justifier que *h* transforme *A* en *B* et *B* en *C*.

Mais ça, c'était avant. Avant que les homothéties ne soient envoyées dans les limbes par les Polichinelles à bord de la même charrette que toutes les transformations du plan.