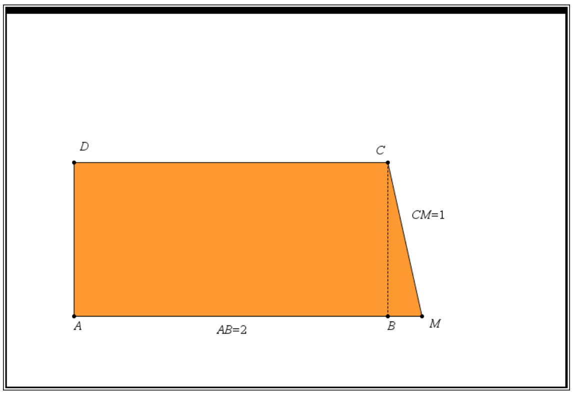
ESD 2015 – 17 : Optimisation

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Sur la figure ci-contre, *ABCD* est un rectangle et *BMC* est un triangle rectangle en *B*.
On donne les longueurs $AB = 2$ et $CM = 1$

Peut-on faire en sorte que l'aire du trapèze *AMCD* soit maximale ? Si oui, dans quel cas ?



B. Les réponses de deux élèves

Élève 1

À l'aide d'un logiciel de géométrie, j'ai calculé l'aire du trapèze $AMCD$. J'obtiens une aire maximale de $2{,}058$ *pour* $BM = 0{,}226$. *À l'aide du théorème de Pythagore je calcule* $BC = 0{,}974$.
L'aire du rectangle $ABCD$ est égale à $2 \times BC = 1{,}948$.
L'aire du triangle rectangle BMC est égale à $0{,}110$. *En faisant la somme on obtient bien* $2{,}058$.

Élève 2

J'ai pris $BM = x$, l'aire du trapèze AMCD est égale à $\frac{1}{2}(4+x)\sqrt{1-x^2}$.
Avec un logiciel de calcul formel, j'ai obtenu

1	*dériver* $\frac{1}{2}(4+x)\sqrt{1-x^2}$
	$(2x^2+4x-1)*\sqrt{1-x^2}/(2x^2-2)$
2	*résoudre* $(2x^2+4x-1)*\sqrt{1-x^2}/(2x^2-2)=0$
	$1/2*(-\sqrt{6}-2), 1/2*(\sqrt{6}-2)$

Comme x est une longueur, x est positif, l'aire est maximale pour $BM = \frac{1}{2}\times(\sqrt{6}-2)$.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites.

2. Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.

3. Proposez deux exercices sur le thème *optimisation* à des niveaux de classe différents et dont l'un au moins nécessite la mise en oeuvre d'un logiciel de géométrie dynamique. Vous motiverez vos choix.

2. Eléments de correction

L'exercice présente un problème de maximisation d'une aire. La situation, quelque peu artificielle il faut en convenir, est construite pour conduire à une fonction numérique avec radicaux.
L'intention est de proposer aux élèves une fonction objectif dont le maximum a lieu pour une valeur irrationnelle, que les élèves ne peuvent pas « deviner ».

Les productions des deux élèves que le jury propose sont intéressantes car elles font appel toutes les deux à un outil informatique, mais pas au même outil. Quel est l'outil le plus pertinent ?

1. *Elève 1*.
Cet élève utilise un logiciel de géométrie dynamique. Il a construit une figure avec son logiciel, qu'il déforme de façon à obtenir *empiriquement* une position de M proche de la position optimale. Cependant, selon lui, il s'agit vraiment de « la » position optimale. Il fixe la figure qu'il a obtenue et effectue une vérification inutile.

Cet élève a su « élaborer une simulation géométrique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel » car il y a toutes raisons de penser que sa construction géométrique est correcte (la déformation fait bien apparaître un maximum, il en obtient une valeur très voisine), lui permettant une expérimentation.

Ses réussites s'arrêtent là. Son expérimentation ne débouche ni sur un questionnement ni sur une réflexion mathématique. C'est pourquoi on ne peut parler d'authentique « compétence » en matière d'utilisation de logiciel de géométrie.

Elève 2.
Cet élève utilise un logiciel de calcul formel.
Il modélise la situation à l'aide d'une fonction, dont l'étude s'avère délicate. Le logiciel de calcul formel l'aide à dériver la fonction puis à déterminer la valeur exacte de son maximum.
Sa résolution est correcte et recevable, à cela près qu'il aurait dû justifier pourquoi il obtient un maximum (en étudiant le signe de la fonction dérivée par exemple)
Il a su traduire en langage mathématique la situation à étudier, la modéliser. Il a su utiliser à bon escient un logiciel de calcul formel pour effectuer des calculs techniques et étayer son raisonnement. Dans son cas, on peut parler de « compétence » en matière d'autonomie, de prise d'initiative et d'intégration d'un outil informatique.

2. La correction s'appuie sur les productions des deux élèves.

Dans ce contexte, il n'y a aucun inconvénient, bien au contraire, à commencer par exploiter la figure que l'élève 1 a réalisée sur son logiciel de géométrie. On mettra en évidence en évidence l'existence d'un maximum (*conjecture*) mais aussi le fait que, aussi habile que l'on soit, on ne peut être sûr d'obtenir empiriquement le maximum. Il faut passer à une phase de démonstration.

L'élève 2 propose de choisir $BM = x$ comme paramètre décrivant la situation. Ce choix est pertinent. Ce n'est pas le seul paramètre possible, mais on va voir qu'il y a peu d'avantages à en envisager d'autres.
On ajoute que x appartient à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, intervalle sur lequel on va étudier la fonction aire.

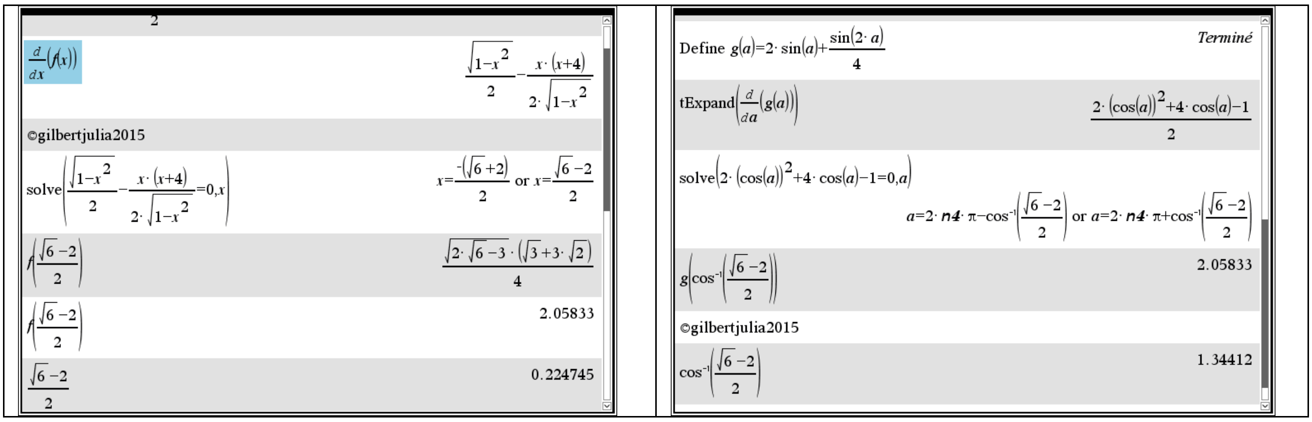
Ci-dessous, pour information, on compare sommairement les performances de deux paramètres différents :

	$BM = x$	Angle $\widehat{BMC} = a$
Ensemble de définition	$[0\ ;\ 1]$	$\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$
Expression des paramètres utiles	$BC = \sqrt{1-x^2}$	$BM = \cos a\ ;\ BC = \sin a$
Expression de l'aire	$f(x) = \dfrac{1}{2}(4+x)\sqrt{1-x^2}$	$g(a) = \dfrac{1}{2}(4+\cos a)\sin a = 2\sin a + \dfrac{1}{4}\sin 2a$
Dérivée	$f'(x) = \dfrac{2x^2+4x-1}{2\sqrt{1-x^2}}$	$g'(a) = 2\cos a + \dfrac{1}{2}\cos 2a = 2\cos^2 a + 4\cos a - 1$

Le seul avantage que présente le choix de l'angle est une plus grande facilité de dérivation.

On se heurte ensuite de toute façon à la difficulté de rechercher les valeurs pour lesquelles la dérivée s'annule.

Certains logiciels de calcul formel, comme TI*n*Spire, peinent à proposer une expression des dérivées facilitant l'étude de son signe. Il est légitime de faire appel au solveur :



En résumé, s'en tenir au choix $BM = x$ de l'élève 2 semble une bonne option. On peut proposer aux élèves de vérifier « à la main » *gjulia*2015 comment le logiciel a fait pour obtenir l'expression performante de la dérivée donnée par l'élève 2.

Il reste à justifier pourquoi $f\left(\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}\right)$ est un maximum, en considérant le sens de variation de f sur $[0\ ;\ 1]$.

La valeur exacte du maximum est une jolie expression hérissée de radicaux qui apporte certes une satisfaction théorique, mais on ne peut se représenter mentalement sa valeur. Une valeur approchée est plus « parlante ».

L'élève 1 avait habilement cerné ce maximum avec son procédé empirique mais n'avait pas résolu le problème.

3. Commentaires

Les deux productions d'élèves n'ont pas été choisies au hasard par l'auteur du sujet. Elles permettent au candidat de comparer deux attitudes différentes devant l'outil informatique.

L'élève 1 est certainement un bon constructeur de figures dynamiques, mais il reste spectateur de ce qu'il se passe sur l'écran. Il est représentatif des mathématiques du « je-vois-que ».

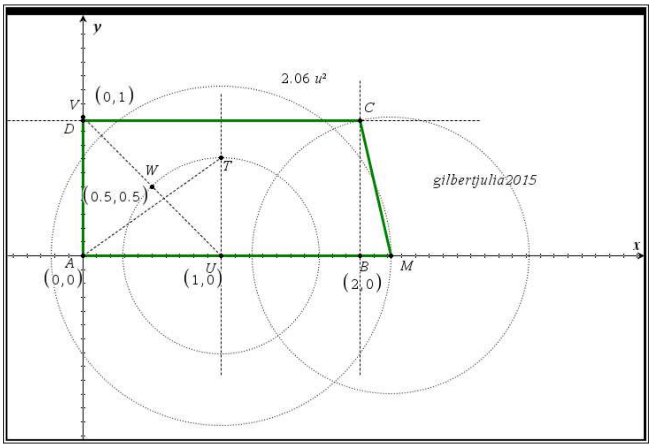
L'élève 2, quant à lui, reste maître du jeu. Il pilote son logiciel de calcul formel, de sorte que ce logiciel lui fournisse l'information qui lui manque pour développer son raisonnement. Il est représentatif d'une exploitation raisonnée de l'outil informatique dans laquelle la directive des programmes « l'utilisation de logiciels de calcul formel peut limiter le temps consacré à des calculs très techniques afin de se concentrer sur la mise en place de raisonnements » prend tout son sens.

4. Pour aller plus loin

1. Puisque $BM = \dfrac{\sqrt{6}-2}{2}$, $AM = 1+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

De tels segments sont constructibles.

Voici ci-contre une construction que le lecteur devra reconstituer (j'ai utilisé une page « graphiques » pour placer plus commodément quelques points utiles : *A, U, B, V*)).



Attention, deux points (*D* et *V*) sont très voisins mais *D* est un point construit (assez tard d'ailleurs) tandis que *V* est le point de coordonnées $(0\ ;1)$.

AUV est rectangle isocèle. Ainsi $UW = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

J'ai ensuite utilisé l'outil compas pour tracer un cercle de centre *U* et de rayon *AT*.

…

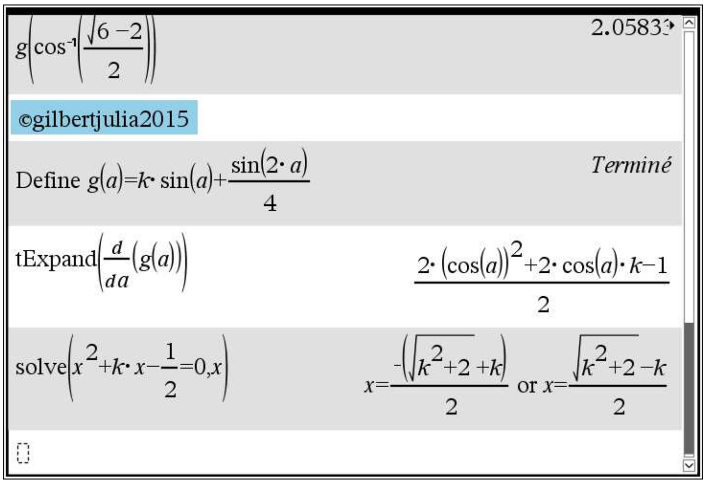
2. On peut se poser la question du choix $AB = 2$.

Que se passe-t-il si on choisit une autre longueur $AB = k$?

$g(a) = \frac{1}{2}(2k + \cos a)\sin a = k\sin a + \frac{1}{4}\sin 2a$

puis : $g'(a) = \cos^2 a + k\cos a - \frac{1}{2}$.

Ce qui fait que, si on utilise le paramètre $x = BM$ pour décrire la situation, la fonction f obtenue aura une dérivée de même signe que $x^2 + kx - \frac{1}{2}$. Le maximum de f est obtenu pour : $x = \frac{\sqrt{k^2 + 2} - k}{2}$



Le choix $k = \frac{1}{2}$ aurait donné un maximum pour une valeur simple de x que les élèves auraient pu éventuellement « deviner », surtout s'ils utilisent habilement un logiciel de géométrie.

Manifestement, l'auteur de l'exercice ne voulait pas de ça et, compte tenu du contexte, on ne peut que lui donner raison.