ESD 2015 –16 : Conjecture et démonstration

Voici peut-être le sujet le plus difficile de la session 2015. La détermination précise de l'ensemble des points M tels que (EH) et (FG) sont parallèles est assez délicate, malgré le fait que « en plaçant M à l'intérieur du carré », la généralité soit un peu restreinte.

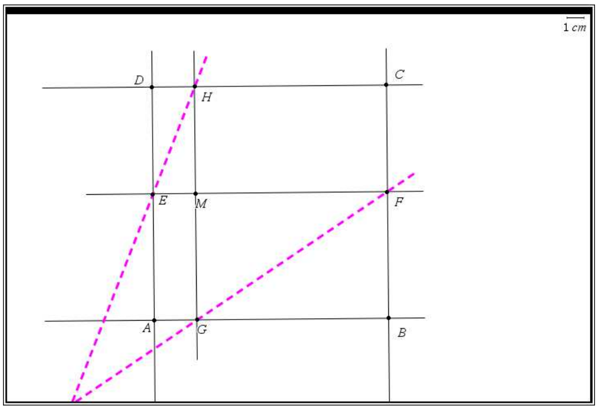
En revanche, les productions d'élèves sont toutes deux consistantes et permettent des commentaires argumentés.

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

ABCD est un carré. On place un point *M* à l'intérieur du carré.
La droite parallèle à (*AB*) passant par *M* coupe [*AD*] en *E* et [*BC*] en *F*.
La droite parallèle à (*AD*) passant par *M* coupe [*AB*] en *G* et [*CD*] en *H*.

L'objectif est de déterminer quelles sont les positions du point *M* pour lesquelles (*EH*) et (*FG*) sont parallèles.



B. Les productions de deux groupes d'élèves de seconde

Production 1

D'après le théorème de Thalès, $(EH) /\!/ (FG)$ *si* $\dfrac{EM}{MF} = \dfrac{HM}{MG} = \dfrac{EH}{GF}$ *donc* $EM \times MG = MF \times HM$.

$EM \times MG$ *est l'aire du rectangle* $EMGA$ *et* $MF \times HM$ *est l'aire du rectangle* $HCFM$.
Donc, $(EH) /\!/ (FG)$ *si l'aire de* $EMGA$ *est égale à l'aire de* $HCFM$.
Si $M \in (DB)$ *alors* $EMGA$ *est le symétrique de* $HCFM$ *par rapport à* (DB).
Donc si $M \in (DB)$ *alors* $(EH) /\!/ (FG)$.

Production 2

Comme on l'a remarqué avec le logiciel de géométrie, le point M devra appartenir à la diagonale $[DB]$ *pour que les segments* $[EH]$ *et* $[GF]$ *soient parallèles.*

On veut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{EH}$ *et* $\overrightarrow{GF}$ *sont colinéaires.*
Pour cela, il faudra mettre en place un repère orthonormé pour déterminer les coordonnées des vecteurs et ensuite il faudra faire les produits en croix.

On suppose que $E\,(0\,;y)$, $G\,(x\,;0)$, $H\,(x\,;1)$ *et* $F\,(1\,;y)$.

$$\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix} x_H - x_E \\ y_H - y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1-y \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{GF}\begin{pmatrix} x_F - x_G \\ y_F - y_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} xy &= (1-y)(1-x) \\ xy &= 1-x-y+xy \\ 0 &= 1-x-y \end{aligned}$$

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions des élèves en étudiant notamment la pertinence de la démarche et des outils utilisés ainsi que les compétences construites

2. Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde, en vous appuyant sur les productions des élèves.

3. Proposez deux exercices sur le thème *conjecture et démonstration*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

2. Eléments de correction

Répertorié dans le thème « *conjecture et démonstration* », cet exercice aurait pu tout aussi bien être répertorié dans le thème « *géométrie plane* ». Il s'agit d'un problème de lieu, celui d'un point *M* assujetti à une propriété de nature géométrique. Son classement dans *conjecture et démonstration* » est pleinement justifié, une investigation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique n'est pas de trop pour se faire une idée de « ce qu'il se passe ».

Les productions des deux groupes d'élèves illustrent deux méthodes différentes permettant de traiter un tel problème.

En « plaçant *M* à l'intérieur du carré », la généralité est un peu restreinte. Un avantage est que les partisans de l'outil des configurations n'ont qu'un cas de figure à envisager. Cela n'a pas d'incidence pour ceux qui sont partisans de l'outil vectoriel. Mais cette restriction atténue à peine la difficulté.

1. *Groupe 1 :*
La méthode utilisée par ce groupe s'apparente à la méthode dite « d'analyse remontante », en ce sens que ce groupe se pose la question : « Qu'est ce qui peut bien impliquer le parallélisme des droites (*EH*) et (*FG*) ? ».
Il est implicite pour ces élèves que le fait de choisir *M* à l'intérieur du carré induit un même ordre d'alignement *E, M, F* et *H, M, G* (configuration « en papillon »). Ceci étant admis, l'égalité de deux des rapports mentionnés par ce groupe implique le parallélisme par le théorème réciproque du théorème de Thalès.
La question suivante est : « Qu'est-ce qui peut bien impliquer l'égalité des rapports ? », question plus épineuse. Le groupe aboutit à une égalité d'aires provoquant celle des rapports.
Nouvelle question : « Qu'est-ce qui peut bien impliquer l'égalité des aires ? ». Une symétrie axiale, et cette symétrie axiale opère si *M* est sur la diagonale [*BD*].

Ce groupe est ainsi à la recherche de conditions *suffisantes* provoquant le parallélisme de (*EH*) et (*FG*).
Ce groupe indique d'ailleurs très clairement ce qu'il est parvenu à justifier : si *M* appartient à la « diagonale (*DB*) », alors (*EH*) et (*FG*) sont parallèles. Il démontre ainsi (si l'on passe sur quelques points de la démonstration à préciser) que cette diagonale est *incluse* dans l'ensemble recherché.

On note dans cette production des capacités à :

- Effectuer des inférences pour obtenir de nouveaux résultats.
- Utiliser des notions de logique (implications essentiellement) pour bâtir un raisonnement.

On note également plusieurs points de vue différents pour traiter ce problème amenant à un usage de différents outils (des propriétés de configurations à l'outil des transformations en passant par l'outil des aires). L'opportunité d'un changement d'un outil pour un autre se discute car un seul outil, celui des

configurations ou celui des transformations au choix pouvait aboutir. Il semble qu'il s'agisse de la résultante des réflexions de différents membres du groupe.
Mettre en commun des idées au sein d'un groupe est une façon de « construire » la capacité d'envisager plusieurs outils pour un même problème, même au prix de quelques maladresses, pourvu que chaque membre du groupe se sente également concerné par le problème à traiter.

Lorsqu'une telle méthode d'analyse remontante d'un problème de lieu est envisagée, il est indispensable de procéder à une étude réciproque : « si (*EH*) et (*FG*) sont parallèles est-ce que nécessairement *M* appartient à (*DB*) ? ». La production de ce groupe doit donc être complétée par une étude réciproque. Dans la correction, on mettra en évidence la nécessité de ce complément.

Groupe 2 :
Ce groupe illustre avec pertinence la mise en œuvre d'une authentique « démarche d'investigation ».
Il a d'abord construit une figure avec un logiciel et observé ce qu'il se passait. L'appartenance à la diagonale (*DB*) est à ce moment une conjecture.
Ce travail expérimental débouche ensuite pour ce groupe sur un questionnement : que doit-on justifier (c'est clairement énoncé) et comment y arriver (les grandes lignes de la démonstration sont indiquées) ?

L'idée de justifier le parallélisme par une colinéarité de vecteurs est pertinente, de même que celle de s'engager vers un traitement analytique de cette colinéarité.

Il reste à ce groupe à identifier l'ensemble défini analytiquement par l'équation : $1-x-y=0$. Ce groupe n'a pas reconnu qu'il s'agissait de la diagonale (*DB*). À cela près, la résolution proposée est correcte et recevable.

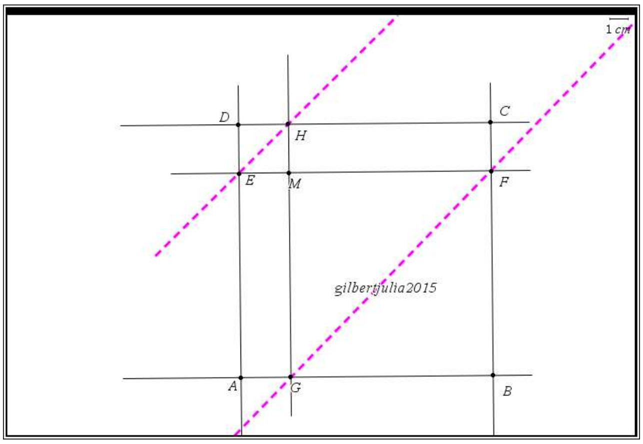
Pour ce groupe, on peut parler de « compétence » en ce qui concerne la maîtrise d'une démarche d'investigation caractérisée car on y relève sans ambiguïté la trilogie « je conjecture, j'identifie ce que je dois prouver, je me donne les moyens de prouver ».

2. Les deux groupes sont d'accord pour situer *M* sur la diagonale du carré.
On peut choisir entre les deux options :

Correction suivant le groupe 1.
On suppose d'abord que *M* appartient au segment [*BD*] extrémités exclues (conformément à l'énoncé *M* est déjà à l'intérieur du carré).
On propose ensuite de trouver une démonstration plus directe du parallélisme visé :

- Comment justifier que *MHDE* et *MFBG* sont des carrés ?
- Si c'est le cas, que dire de leurs diagonales respectives (*EH*) et (*FG*) ?

Réciproquement, si *M* est un point intérieur au carré tel que (*EH*) et (*FG*) sont parallèles, est-ce que *M* est forcément sur [*BD*] ?



On remarque une configuration de Thalès « en papillon » avec deux droites issues de *M* coupant les deux parallèles : $\dfrac{MH}{MG}=\dfrac{ME}{MF}$ et par conséquent : $\dfrac{MH}{ME}=\dfrac{MG}{MF}=\dfrac{MH+MG}{ME+MF}=\dfrac{HG}{EF}=1$.
On en déduit : $MH=ME$; $MG=MF$.
M, déjà intérieur au carré, est sur [*BD*] car les rectangles *MHDE* et *MFBG* sont deux carrés qui ont en commun la diagonale (*BD*) avec le carré *ABCD*.

Correction suivant le groupe 2.
On reprend point par point la démarche de ce groupe, en corrigeant au passage quelques détails et en identifiant l'ensemble déterminé par l'équation $1 - x - y = 0$:

- On commence par expliciter le « repère orthonormé » utilisé. Il s'agit du repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.
- Les droites (EH) et (FG) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{GF}$ sont deux vecteurs non nuls colinéaires.
- Si on désigne par $(x\ ;\ y)$ les coordonnées du point M, il est exact que les coordonnées des deux vecteurs en question sont $\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix} x \\ 1-y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GF}\begin{pmatrix} 1-x \\ y \end{pmatrix}$.
- Ces deux vecteurs sont non nuls si et seulement si $(x\,;y) \neq (0\ ;\ 1)$ et $(x\,;y) \neq (1\ ;\ 0)$ donc si et seulement si M est distinct de B et de D (condition pour que les deux droites soient définies).
- Ceci étant acquis, il reste à exploiter un critère de colinéarité. Au niveau seconde, « deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées dans un même repère sont proportionnelles ». L'égalité des « produits en croix » est une façon d'exprimer cette proportionnalité.
- M étant distinct de B et D, on établit l'équivalence de la propriété de proportionnalité des coordonnées avec la relation $1 - x - y = 0$ qui est une équation de la droite (BD).

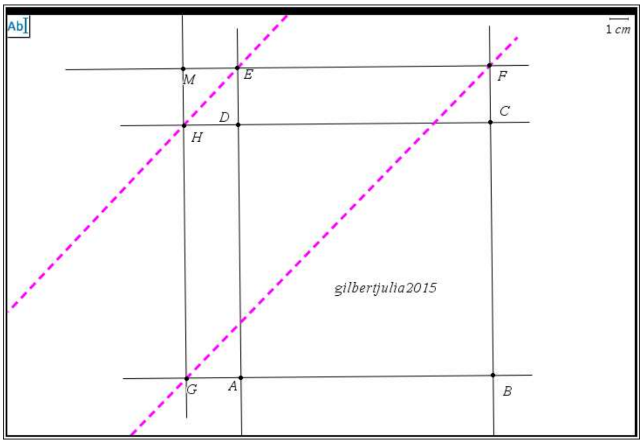
On conclue que (EH) et (FG) sont parallèles si et seulement si M appartient à (BD) privée de B et de D.

Dans cette démarche, il n'est pas utile d'envisager une étude réciproque dès lors que l'équivalence de la propriété de proportionnalité des coordonnées avec la relation $1 - x - y = 0$ a été justifiée avec soin.

En comparant les deux démarches, il apparaît que l'usage de l'outil vectoriel et de la géométrie analytique est plus performant que celui de l'outil des configurations. C'est un outil nouveau en classe de seconde et l'enseignant a intérêt à en souligner les qualités.

3. Pour aller plus loin

1. On peut regarder ce qu'il se passe dans la démarche du groupe 1 si on suppose M extérieur au carré.



Dans la démonstration directe, on observe des configurations « en papillon » à la place de configurations triangulaires.

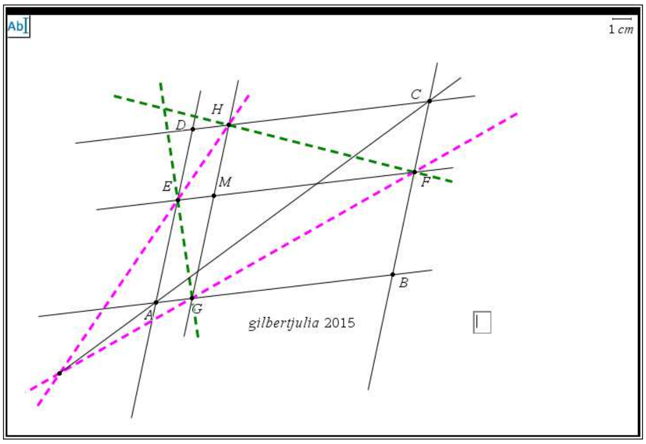
En revanche, dans la démonstration réciproque, on n'a plus une configuration de Thalès « en papillon », mais en triangle. Il y a un changement à ce niveau :

$$\frac{MH}{ME}=\frac{MG}{MF}=\frac{|MH-MG|}{|ME-MF|}=\frac{HG}{EF}=1$$

La conclusion finale est inchangée.

Finalement, le parallélisme a lieu si et seulement si M appartient à la droite (BD), points B et D exclus.

2. La situation présentée dans cet exercice est plus générale et de nature purement affine. Le fait que $ABCD$ soit supposé être un carré n'intervient par aucune des propriétés métriques d'un carré. C'est une hypothèse que l'on peut affaiblir.



Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un parallélogramme. M est un point du plan, n'appartenant pas aux côtés.

On trace les parallèles aux côtés de $ABCD$ passant par M et on désigne par E, F, G, H les points d'intersection de ces parallèles avec les côtés de $ABCD$ (voir figure).

Montrer que les droites (EH), (FG), (AC) sont concourantes ou parallèles.

Une résolution à l'aide de l'outil de la géométrie analytique.

On rapporte le plan au repère $\left(A,\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}\right)$. Dans ce repère, une équation cartésienne de (BD) est $x+y-1=0$.

Soient $(a,\ b)$ les coordonnées du point M (pour dégager les notations x et y). Puisque M n'est sur aucun des côtés du parallélogramme, a et b sont supposés distincts de 0 et de 1.

Coordonnées des vecteurs utiles: $\overrightarrow{EH}\begin{pmatrix} a \\ 1-b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GF}\begin{pmatrix} 1-a \\ b \end{pmatrix}$.

Si M n'est sur aucun des côtés du parallélogramme, aucun de ces vecteurs n'est le vecteur nul.

Equation de (*GF*) : $\begin{vmatrix} x-a & 1-a \\ y & b \end{vmatrix} = 0$ soit : $b\,x + (a-1)\,y - a\,b = 0$

Equation de (*EH*) : $\begin{vmatrix} x & a \\ y-b & 1-b \end{vmatrix} = 0$ soit : $(b-1)\,x + a\,y - a\,b = 0$.

Rechercher les coordonnées d'un éventuel point d'intersection de (*GF*) et (*EH*) revient à rechercher le couple solution éventuel du système *S* d'équations : $\begin{cases} b\,x + (a-1)y = a\,b \\ (b-1)x + a\,y = a\,b \end{cases}$.

Le déterminant de *S* est : $\begin{vmatrix} b & a-1 \\ b-1 & a \end{vmatrix} = a+b-1$. Ce déterminant est nul si et seulement si *M* appartient à la droite (*BD*) privée de *B* et de *D* eux-mêmes (sachant que par hypothèse *M* n'est pas sur les côtés du carré).

Si tel est le cas, $\overrightarrow{GF}(1-a\ ;1-a) = (1-a)\overrightarrow{AC}$ gjulia2015; $\overrightarrow{EH}(a\ ;a) = a\,\overrightarrow{AC}$. Les deux droites sont parallèles à (*AC*). Sinon, ce système admet un couple solution : $\left(\dfrac{a\,b}{a+b-1}\ ;\dfrac{a\,b}{a+b-1}\right)$. Les deux droites ont un point d'intersection $I\left(\dfrac{a\,b}{a+b-1}\ ;\dfrac{a\,b}{a+b-1}\right)$ situé sur (*AC*) puisque les coordonnées de *I* sont égales.

On montrerait sous les mêmes hypothèses que (*BD*), (*EG*), (*HF*) sont elles aussi parallèles ou concourantes.