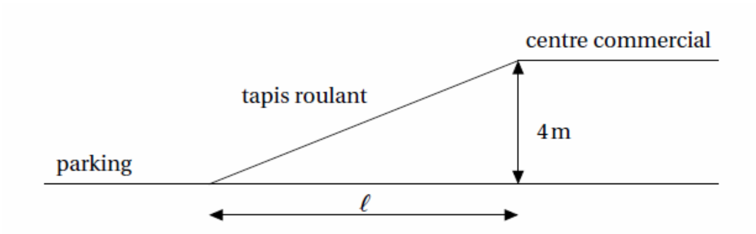
# ESD 2015 – 15 : Problèmes avec prise d'initiative

## 1. Le sujet

### A. L'exercice proposé au candidat

On souhaite installer un tapis roulant permettant aux clients d'un centre commercial de passer du parking souterrain aux commerces en moins d'une minute.

Le tapis roulant sélectionné possède une vitesse de déroulement de 0,75m/s et peut présenter une pente maximale de 10%. Le schéma ci-dessous présente les caractéristiques géométriques du lieu.




La pente $p$ est donnée par : $p = \frac{4}{l}$, où la longueur $l$ est exprimée en mètres.

L'architecte des travaux s'interroge sur les positions possibles pour faire débuter le tapis roulant.
Pouvez-vous l'aider ?

### B. Extrait du document ressource seconde, fonctions

***Quels sont les objectifs à atteindre?***
*Comme dans toutes les parties du programme, les paragraphes qui précèdent les tableaux précisant les contenus et les capacités attendues, fixent de façon nette les objectifs à atteindre et les déclinent en termes de* ***nature des problèmes que les élèves doivent savoir résoudre, précisant également le degré d'autonomie attendu.*** *Ces objectifs sont ambitieux, le degré d'autonomie que les élèves doivent montrer pouvant être maximal : autonomie du choix de la démarche, de la nature du traitement à apporter, de la modélisation à mettre en oeuvre.*
***Construire chez tout élève cette autonomie nécessite une formation adaptée incluant une confrontation fréquente à des problèmes posés sous forme ouverte.***
*Le programme fixe comme objectif la maîtrise de problèmes d'optimisation ou du type « $f(x) > k$ ».*

- *Dans un premier temps un élève doit pouvoir résoudre un tel problème, de façon exacte ou approchée, à l'aide d'un graphique et de façon exacte si les variations de la fonction et les antécédents de k sont connus.*
- *Dans un second temps cette étude peut être faite, selon le cas, en exploitant les potentialités de logiciels, graphiquement ou algébriquement, toute autonomie pouvant être laissée pour associer au problème une fonction.*

### C. Le travail à exposer devant le jury

**1.** Précisez en quoi un tel exercice répond aux objectifs mentionnés dans le document ressource.

**2.** Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

**3.** Proposez deux ou trois exercices sur le thème *problèmes avec prise d'initiative* à des niveaux de classes différents dont l'un au moins pour des élèves de collège. Vous prendrez soin de motiver vos choix.

## 2. Eléments de correction

J'intervertis l'ordre des questions …

**2.** *Correction de l'exercice.*
On va insister sur trois phases caractéristiques dans la résolution d'un problème de ce type :

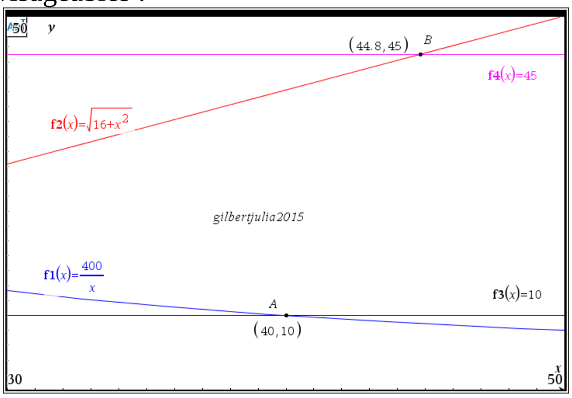
***1. Traduction mathématique de la situation***
Le premier travail à faire est de traduire en langage mathématique les informations données par l'énoncé. Ces informations se présentent sous forme de conditions que doit vérifier $l$ pour que le tapis roulant soit conforme au cahier des charges et aux normes de construction. On parle de *contraintes* portant sur la longueur $l$ du tapis roulant, elles vont s'exprimer mathématiquement sous forme d'inéquations :

| Enoncé des contraintes extraites du texte | Paramètres utiles (donnés par l'énoncé ou qu'on obtient par le calcul) | Traduction mathématique |
|---|---|---|
| Pente maximale 10 % | La pente est le nombre $p=\dfrac{4}{l}$ | $\dfrac{4}{l}\leq 0{,}1$ |
| Durée maximale du trajet : une minute à la vitesse de 0,75 m/s | La longueur du tapis : elle est égale à $\sqrt{16+l^2}$.<br>La durée du parcours : Il faut $\dfrac{\sqrt{16+l^2}}{0{,}75}$ secondes pour parcourir une distance égale à la longueur du tapis.<br>La distance maximale que l'on peut parcourir en une minute à la vitesse de 0,75 m/s : cette distance maximale est 45 mètres. | $\dfrac{\sqrt{16+l^2}}{0{,}75}\leq 60$ ou $\sqrt{16+l^2}\leq 45$ suivant que l'on exploite la durée maximale du parcours ou la distance maximale que l'on peut parcourir. |

Les contraintes imposées se traduisent par un système de deux inéquations à une inconnue : $\begin{cases}\dfrac{4}{l}\leq 0.1\\ \sqrt{16+l^2}\leq 45\end{cases}$

***2. Traitement mathématique***
Plusieurs traitements mathématiques pertinents sont envisageables :

2.1. Exploiter les potentialités graphiques d'un logiciel.
Il est cependant très délicat de trouver une fenêtre d'affichage qui convienne pour représenter les deux fonctions $l\mapsto\dfrac{4}{l}$ et $l\mapsto\sqrt{16+l^2}$ en même temps.
On peut représenter la fonction $l\mapsto\dfrac{400}{l}$ qui donne le pourcentage de pente pour atténuer cette difficulté.




2.2. Résoudre algébriquement le système d'inéquations :

$$\begin{cases}\dfrac{4}{l}\leq 0.1\\ \sqrt{16+l^2}\leq 45\end{cases} \underset{gjulia2015}{\Leftrightarrow} \begin{cases}l\geq 40\\ 16+l^2\leq 2025\end{cases} \text{ ou encore : } \begin{cases}\dfrac{4}{l}\leq 0.1\\ \sqrt{16+l^2}\leq 45\end{cases} \underset{gjulia2015}{\Leftrightarrow} 40\leq l\leq\sqrt{2009}$$

2.3. Effectuer un traitement mixte :

D'une part l'inéquation $\frac{4}{l} \leq 0{,}1$ est équivalente à $l \leq 40$.

D'autre part on définit la fonction $f$ sur l'intervalle $[40\ ;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{16 + x^2}$ et on détermine l'ensemble des solutions dans cet intervalle de l'inéquation $f(x) \leq 45$ soit graphiquement soit en calculant l'antécédent de 45 et en tenant compte de la croissance stricte de $f$ sur son intervalle de définition.

2.4. Trouver une condition *suffisante* portant sur $l$ pour que les contraintes soient satisfaites. Il en est ainsi si on utilise l'inégalité triangulaire : le schéma fait apparaître un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent respectivement 4 mètres et $l$ mètres et dont l'hypoténuse est la longueur du tapis.
Si $4 + l \leq 45$ alors *a fortiori* $\sqrt{16 + l^2} \leq 45$.

***3. Synthèse et conclusion.***
Suivant le traitement mathématique qui a été fait, le conseil à donner varie quelque peu :

3.1. *Il faut et il suffit* que $l$ soit entre l'abscisse de $A$ et celle de $B$ ;

3.2. *Il faut et il suffit* que $l$ vérifie : $40 \leq l \leq \sqrt{2009}$.

3.3. Compte tenu que $44 < \sqrt{2009} < 45$ *il suffit* de choisir $l$ tel que $40 \leq l \leq 44$.

3.4. Compte tenu de l'inégalité triangulaire, *il suffit* que $40 \leq l \leq 41$.

3.5. On peut conseiller un tapis tel que $l = 41$.
…

Une étude sur tableur montre ci-contre les longueurs $l$ possibles qui sont des nombres entiers de mètres.

L'enseignant peut s'en servir pour synthétiser les divers « conseils » et en valider certains.

45 ne convient pas car la durée de parcours du tapis dépasse la minute.

| | A ll | B pente | C duree | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| ◆ | =seq(k,k,40,45) | =400/ll | = √ (4+ll^2)/(0.75) | | |
| 1 | 40. | 10. | 53.4 | gjulia2015 | |
| 2 | 41. | 9.76 | 54.7 | | |
| 3 | 42. | 9.52 | 56.1 | | |
| 4 | 43. | 9.3 | 57.4 | | |
| 5 | 44. | 9.09 | 58.7 | | |
| 6 | 45. | 8.89 | 60.1 | | |
| 7 | | | | | |
| 8 | | | | | |
| 9 | | | | | |

D1 gjulia2015

Il reste à comparer les différentes démarches. Toutes sont pareillement défendables, même si leurs performances se discutent ; le tout est que la conclusion soit correcte, cohérente avec la démarche choisie et bien argumentée.

**1.** La correction précédente fait apparaître les points suivants :

| | |
|---|---|
| Est-ce un problème ouvert ? | Oui. La question « pouvez-vous l'aider » ne dit rien ni de la nature de l'aide à apporter ni de la façon de la présenter |
| Quel est le degré d'autonomie des élèves ? | Il est « maximal » puisque les élèves ont ici toute liberté *: « autonomie du choix de la démarche, de la nature du traitement à apporter, de la modélisation à mettre en œuvre »*. |
| L'élève a-t-il une certaine autonomie pour associer ou non au problème une fonction ? | Oui. S'il le juge utile, l'élève peut associer au problème la fonction $l \mapsto \sqrt{16+l^2}$ |
| Quel est le type de problème dont la maîtrise est visée ? | Un problème de la forme $f(x) \leq k$, l'antécédent de $k$ pouvant être déterminé. |

Ce problème entre donc bien dans le cadre des programmes.
J'aurais cependant tendance à chipoter un petit peu à propos de l'utilité d'associer au problème une fonction. Il s'agit certes d'une démarche possible, à prendre en compte et à accepter volontiers. Mais il faut bien reconnaître que dans ce contexte, la fonction associée est poussive, une solution algébrique du système d'inéquations est nettement plus performante.

De toute façon, dans un tel contexte,  l'enseignant n'a pas à prendre parti ni à imposer une solution plutôt qu'une autre. Il dresse seulement l'inventaire des initiatives prises. Il se montre pointilleux non pas sur le choix de la démarche, mais sur l'argumentation et sur la justification de « l'aide » que l'élève se propose d'apporter, suite à sa démarche. Le contexte se prête bien à une intéressante diversité d'initiatives.

Rien n'empêche cependant l'enseignant de rabattre un petit peu le caquet des partisans du « tout logiciel » si cher aux instances ministérielles. Il apparaît bien que le recours à un logiciel de représentation graphique est ici une artillerie inutilement lourde. Le fait de se précipiter sur un écran graphique et d'y faire tracer la belle courbe de $l \mapsto \sqrt{16+l^2}$  n'impressionne personne. Le temps de saisir les fonctions à représenter et de trouver une fenêtre d'affichage où l'on puisse voir quelque chose, tout partisan d'une solution algébrique a tiré ses conclusions depuis belle lurette.

## 3. Commentaires.

Personnellement, je m'interroge sur la pertinence de l'habillage de ce sujet. Présenter comme des lendemains qui chantent à des élèves futurs consommateurs (ou qui le sont déjà) une cité idéale dans laquelle on peut aller du parking à la grande surface en tapis roulant, c'est tout de même prendre le parti d'une certaine forme de société que l'on a le droit de contester. Est-ce là la « formation citoyenne » que l'enseignant se doit d'assurer ? Je me permets d'en douter. Je serais plutôt partisan de décocher une flèche assassine soulignant le côté caricatural (la stupidité ?) de la « situation extraite de la vie courante » que l'on cherche à nous faire gober.

Je saisis cette occasion pour rendre un hommage public à Stéphanie et à Jean-Paul.
Stéphanie, c'est la dynamique marchande de légumes chez laquelle je me rends à pied, cabas à la main, et qui me vend, entre autres, les légumes que produit localement son papa maraîcher.
Jean-Paul, c'est l'artisan boucher qui a tant de peine à tenir à bout de bras son magasin malgré ses longues heures de labeur quotidien et qui me vend, entre autres, du veau de Cerdagne et des botifarres blanques séchées en Vallespir.

Et pour conclure, puisqu'il est question de tapis, je me permets de rappeler que l'obligation de mise aux normes d'accessibilité édifices publics pour les personnes à mobilité réduite a été récemment retardée. Peut-être y a-il des tapis roulants à installer plus intelligemment. Les auteurs de sujets devraient y réfléchir.