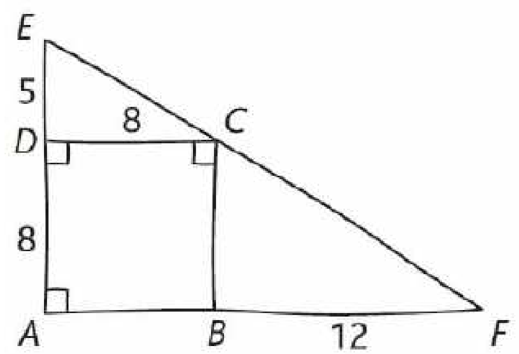
ESD 2015 – 13 : Géométrie plane

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat



La figure ci-contre est dessinée à main levée.
Les points *A*, *D*, *E* et *A*, *B*, *F* sont alignés.
Les dimensions sont exprimées en cm.

Les points *E*, *C* et *F* sont-ils alignés ?

D'après manuel Déclic seconde

B. Les réponses de trois élèves

Élève 1

Dans le triangle rectangle DEC, avec le théorème de Pythagore :
on a $EC^2 = DC^2 + DE^2 = 8^2 + 5^2 = 89$, *d'où* $EC = 9{,}4$.
Dans le triangle rectangle CFB, on a $CF^2 = BF^2 + BC^2 = 12^2 + 8^2 = 208$, *d'où* $CF = 14{,}4$.
Dans le triangle rectangle FAE : $EF^2 = AF^2 + AE^2 = 20^2 + 13^2 = 569$, *d'où* $EF = 23{,}8$.
On a $9{,}4 + 14{,}4 = 23{,}8$, *c'est-à-dire* $CF + EC = EF$.
Donc E, C et F sont alignés.

Élève 2

J'applique le théorème de Thalès qui dit que $\frac{FB}{FA} = \frac{BC}{AE}$, *donc* $\frac{12}{20} = \frac{8}{13}$, *donc* $156 = 160$.
C'est faux, j'ai dû faire une erreur.

Élève 3

$\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix} 8-0 \\ 8-13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 20-0 \\ 0-13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -13 \end{pmatrix}$.
$\frac{8}{-5} = \frac{20}{-13}$, *donc* $-1{,}5 \neq -1{,}6$.

donc $\overrightarrow{EC}$ *et* $\overrightarrow{EF}$ *ne sont pas colinéaires, donc les points E, C et F ne sont pas alignés.*

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez chacune des productions d'élèves en mettant en évidence leurs réussites et en précisant l'aide qui pourrait leur permettre de mener à bien leur démarche.

2. Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde

3. Proposez deux ou trois exercices sur le thème *géométrie plane*, dont l'un au moins favorise la prise d'initiative. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

2. Eléments de correction

L'exercice présente un problème d'alignement (ou de non alignement) de points.
Une figure à main levée accompagne délibérément le texte de l'énoncé. Ce jumelage « texte + figure à main levée » a un statut particulier en géométrie. Le texte apporte son lot d'informations tandis que le dessin à main levée, qui est une illustration du texte, apporte d'autres informations par son codage. Il appartient aux élèves de savoir faire le lien entre les informations prises dans le texte et celles issues du codage de la figure puis de savoir se construire une image mentale de la figure idéale résultant de la synthèse des deux sources.

Un dessin à main levée interdit toute vérification effectuée avec les instruments de géométrie (règle, compas, mesures). Il est remarquable ici que le seul trait rectiligne du dessin à main levée est justement celui qui représente l'alignement litigieux, provocation intentionnelle à faire dire : « je place la règle sur la figure, je trace un trait qui passe exactement par E, C et F donc ces points sont bien alignés »,

Cet exercice a deux objectifs :

- D'une part faire la distinction entre « ce que l'on sait par hypothèse », « ce qu'on voit sur le dessin » et « ce qu'on prouve ». L'alignement E, C, F ne figure pas dans les hypothèses, il est apparent sur le dessin. Dans quelle mesure peut-on se fier à cette apparence ?
- D'autre part faire un inventaire de différentes méthodes permettant de valider ou d'invalider une propriété d'alignement de points.

1. *Elève 1*.
Cet élève a l'intention d'utiliser l'inégalité triangulaire.
Il calcule à l'aide du théorème de Pythagore les carrés des longueurs des segments EC, CF, EF dans le but de calculer ensuite EC, CF et EF. Si $EC + CF = EF$, alors les points E, C, F sont alignés dans cet ordre et si $EC + CF > EF$, il n'y a pas alignement.
Cependant, il ne raisonne pas sur les valeurs exactes de ces longueurs, mais sur des valeurs approchées.
Il conjecture probablement que les points E, C, F sont effectivement alignés. Ce qui pourrait expliquer qu'il utilise l'arrondi au dixième de EC et CF mais la troncature au dixième et non pas l'arrondi de EF. En utilisant la troncature, il obtient une relation d'égalité qui, selon lui, justifie que $EC + CF = EF$ et par suite justifie l'alignement. CQFD !
L'hypothèse la plus probable est que cet élève n'a pas su comparer les valeurs exactes $\sqrt{89} + \sqrt{208}$ et $\sqrt{569}$.
On peut l'aider de trois façons :

- Ou bien lui proposer de comparer les carrés de ces deux réels, c'est-à-dire $297 + 8\sqrt{1157}$ et 569. Leur différence est $8\sqrt{1157} - 272$ et compte tenu que $\left(8\sqrt{1157}\right)^2 = 74048 > 73984 = 272^2$, on peut en déduire que $297 + 8\sqrt{1157} > 569$ puis que $EC + CF > EF$
- Ou bien lui proposer de déterminer à l'aide de la calculatrice des encadrements de $\sqrt{89} + \sqrt{208}$ et de $\sqrt{569}$ de manière à séparer ces deux nombres $23{,}856 < \sqrt{89} + \sqrt{208} < 23{,}857$ tandis que $23{,}853 < \sqrt{569} < 23{,}854$
- Ou bien, toujours à l'aide de la calculatrice, lui p^proposer de donner une valeur approchée suffisamment fine de la différence (par exemple $\left(\sqrt{89} + \sqrt{208}\right) - \sqrt{569} = 0{,}0025$ à 10^{-4} près justifierait la stricte positivité de la différence).

Sa démarche aurait pu permettre d'aboutir, si cet élève avait utilisé les valeurs exactes ou, à meilleur escient, des valeurs approchées.

Elève 2.
Cet élève conjecture comme l'élève 1 qu'il doit y avoir alignement. Il a l'intention d'utiliser « le théorème de Thalès », vu que les droites (BC) et (AE) sont parallèles. Or, c'est la réciproque de ce théorème qui pourrait, éventuellement, justifier l'alignement.
Cette confusion entre théorème direct et théorème réciproque l'amène à une pétition de principe.
Il suppose implicitement qu'il y a alignement. Il applique alors le théorème de Thalès avec la relation des « troisièmes côtés » et se trouve inévitablement face à une relation d'égalité absurde qui le déconcerte.

La démarche de cet élève ne permettait en aucune façon d'aboutir.
Pour aider cet élève, il faudrait revenir les énoncés du théorème direct, de sa forme contraposée et du théorème réciproque. Contextualiser ces énoncés (quelles sont dans cet exercice les hypothèses ? Quel énoncé permettra d'aboutir suivant qu'il y a alignement ou non ?)

Elève 3.
Cet élève a l'intention d'utiliser l'outil vectoriel et la géométrie analytique.
Il rapporte implicitement le plan à un repère adapté dans lequel il exprime les coordonnées de deux vecteurs remarquables.
Il cherche à appliquer un critère de colinéarité non optimal : « si deux vecteurs du plan sont colinéaires, alors les rapports de leurs coordonnées $\frac{ordonnée}{abscisse}$ sont égaux », critère qui l'amène a écrire une égalité absurde.
En cela, il commet lui aussi une pétition de principe, puisqu'il présuppose la colinéarité. La différence avec l'élève 2 est qu'il prend conscience de l'absurdité de l'égalité qu'il a écrite et en tire une conclusion recevable.
La démarche de cet élève aurait pu aboutir s'il avait utilisé un critère de colinéarité ou de non colinéarité plus performant.
Pour aider cet élève, on peut lui demander comment vérifier la colinéarité de deux vecteurs dont on connaît les coordonnées dans un repère (y a-t-il plusieurs façons ?).
On peut aussi lui demander de quel droit il écrit une égalité entre deux rapports qui s'avèrent inégaux (comment d'ailleurs justifier l'inégalité : écrire une inégalité entre deux valeurs approchées dont on n'a pas précisé la qualité est incorrect, il faut corriger cela).

2. *Correction de l'exercice.*
En premier lieu, faire une description détaillée de la figure (en exploitant le texte et le codage) et la décomposer en sous-figures :

- *ABCD* est un carré de côté 8 (il a trois angles droits et deux côtés consécutifs égaux d'après le codage)
- *AEF* est un triangle rectangle en *A*. Les longueurs des côtés de l'angle droit sont 13 et 20.
- *EDC* est un triangle rectangle en *D* (l'angle de sommet *D* est supplémentaire d'un angle droit). Les longueurs des côtés de l'angle droit sont 5 et 8.
- *BCF* est un triangle rectangle en *B* (l'angle de sommet *B* est supplémentaire d'un angle droit). Les longueurs des côtés de l'angle droit sont 12 et 8.

On ne sait pas si le point *C* appartient ou non au segment [*EF*] et c'est ce que l'on cherche à savoir.

Faire un inventaire de démarches possibles, en reprenant les productions des trois élèves.

1. On peut vérifier si oui ou non l'inégalité triangulaire est une égalité. L'inconvénient est que l'on doit comparer des nombres réels contenant des radicaux et les calculs à mener à bien sont assez techniques.

2. On peut exploiter une configuration de Thalès. La droite (*BC*) coupe la droite (*EF*) en un certain point *I* et l'on va chercher à savoir si ce point est le point *C* ou bien un autre point (on ne sait pas s'il s'agit d'un point de la figure ou d'un nouveau point).
D'après le théorème de Thalès : $\frac{FB}{FA}=\frac{BI}{AE}$ c'est-à-dire : $\frac{12}{20}=\frac{BI}{13}$. On en déduit : $BI=\frac{39}{5}=7{,}8$. Le point *I* est distinct du point *C*, les points *E*, *C*, *F* ne sont pas alignés. On souligne les différences avec la production de l'élève 2 qui avait supposé d'emblée $I=C$.

3. On peut rapporter le plan à un repère orthonormal et exprimer les coordonnées de deux vecteurs remarquables. Au niveau seconde, la colinéarité d'un vecteur $\vec{u}$ et d'un vecteur $\vec{v}$ non nul se caractérise par

l'existence d'un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$. Dans ce contexte, il s'agit de savoir s'il existe un réel k tel que : $\begin{cases} 20 = 8k \\ -13 = -5k \end{cases}$ ou bien si ces deux équations sont incompatibles.

Demander aux élèves si d'autres méthodes permettraient d'aboutir. Par exemple :

4. Ecrire une équation de la droite (EF) et vérifier si C appartient ou non à cette droite.

5. Comparer les sinus ou les cosinus d'angles de la figure.

3. Commentaires

Ce type d'exercice présente de nombreux avantages.

D'une part il habitue les élèves à ne pas se fier aux apparences et à construire un raisonnement. En ce sens, il joue un rôle de « contre-exemple ». Ce que l'on « constate » n'est pas toujours la vérité.

D'autre part, la situation (problème d'alignement) est bien choisie pour susciter plusieurs méthodes différentes permettant d'aboutir. Il n'y a pas qu'un seul raisonnement permettant de prouver, le tout est d'aboutir à une preuve. Cela habitue les élèves à avoir plusieurs points de vue sur une même situation, à envisager plusieurs pistes.

En résumé, voici un exemple d'exercice formateur. Il appartient à l'enseignant d'exploiter cette qualité.