ESD 2015 –04 : Conjecture et démonstration

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par : $f(x)=\mathbf{e}^{x}$ et $g(x)=\mathbf{e}^{-x}$. On note :

- $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé du plan.
- a un réel quelconque.
- M le point de $\mathcal{C}_f$ et N le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse a.
- $\mathcal{D}$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ en M et Δ la tangente à $\mathcal{C}_g$ en N ;
- P et Q les points d'intersection respectifs de $\mathcal{D}$ et Δ avec l'axe des abscisses.

Conjecturer et démontrer une propriété des droites $\mathcal{D}$ et Δ ainsi qu'une propriété de la distance PQ.

B. Extrait d'un programme officiel et d'un document ressource

Document ressource "Les compétences mathématiques au lycée"
La formation mathématique au lycée général et technologique vise [...] le développement de compétences spécifiques aux mathématiques : chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner, communiquer. [...]
La résolution de problèmes est un cadre privilégié pour développer, mobiliser et combiner plusieurs de ces compétences.

Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques
Classe terminale de la série scientifique
L'utilisation de logiciels, d'outils de visualisation et de simulation, de calcul (formel ou scientifique) et de programmation change profondément la nature de l'enseignement en favorisant une démarche d'investigation.
En particulier lors de la résolution de problèmes, l'utilisation de logiciels de calcul formel limite le temps consacré à des calculs très techniques afin de se concentrer sur la mise en place de raisonnements

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Précisez en quoi l'exercice proposé permet de développer, mobiliser et combiner les compétences explicitées dans le document ressource.

2. Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique. Vous mettrez en évidence ce que peut apporter l'utilisation d'outils logiciels.

3. Proposez deux exercices sur le thème *conjecture et démonstration* dont l'un au moins au niveau collège. Vous motiverez vos choix en précisant les objectifs visés par chacun d'eux.

2. Eléments de correction

L'exercice proposé porte sur des propriétés géométriques des tangentes aux courbes représentatives de la fonction exponentielle et de son inverse.
Il a clairement été fabriqué de toutes pièces pour favoriser l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique.

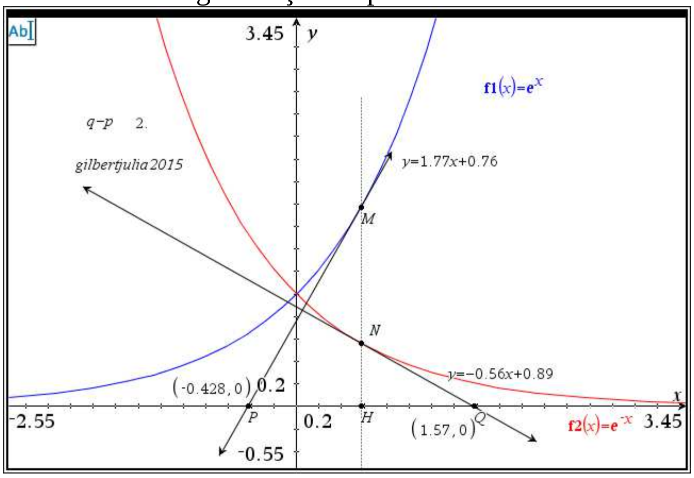
La question **2** posée par le jury me paraît quelque peu équivoque et susceptible de provoquer un contresens. Est-ce bien au moment de la correction de l'exercice que peut être mis en évidence « l'apport de l'utilisation d'outils logiciels »? On a le droit de s'interroger. Il faut plutôt comprendre « Vous mettrez en évidence à quel moment de la résolution de l'exercice l'utilisation d'outils logiciels vous paraît souhaitable ».

1. Les conjectures attendues concernent des propriétés tangentielles des courbes représentatives de fonctions exponentielles.

Il est certes possible de faire construire aux élèves une figure sur papier, de façon à mettre en place les différents éléments de la figure (points *M* et *N* d'abscisse *a*, tangentes, …). C'est d'ailleurs une bonne façon de faire en sorte que les élèves s'approprient la situation. Mais si l'on s'en tient là, les élèves ne vont disposer chacun que d'un seul exemple de points *M* et *N*. Cette figure sur papier, statique, ne peut convenir pour conjecturer commodément des propriétés de la figure indépendantes de *a*.

Or, l'objectif est ici de confier aux élèves eux-mêmes le « cahier des charges » relatif à la situation à étudier. Une figure dynamique réalisée avec un logiciel de géométrie révèlera plus facilement des propriétés qui résistent au déplacement de *M* et de *N* sur leurs courbes. Cela change la façon de présenter l'exercice.

Ci-contre par exemple on a créé un point *H* que l'on peut faire glisser sur l'axe des abscisses et qui joue le rôle de point maître.



Au lieu d'énoncer « Montrer que les deux tangentes sont perpendiculaires et que la distance *PQ* est constante », l'énoncé et la démonstration des propriétés de la figure sont délégués aux élèves.

Gagne-t-on au change à laisser ainsi cette liberté aux élèves ? Cela dépend de ce qu'il se passe après la formulation des conjectures.

C'est dans la trilogie :

1. Je conjecture
2. Je cherche un moyen pour valider (ou invalider) ma conjecture
3. Je rédige une preuve validant (ou invalidant) ma conjecture

que vont se combiner les compétences indiquées dans les textes officiels. Il faut expérimenter pour conjecturer, chercher pour savoir comment valider, représenter, calculer et raisonner pour prouver.

2. *Correction de l'exercice.*
Le jury attend manifestement du candidat qu'il fasse une synthèse de l'exercice en s'appuyant sur une figure dynamique projetée sur un écran. L'outil « Mesures » du logiciel de géométrie peut y mesurer sans coup férir l'angle des deux tangentes ainsi que la distance *PQ* et afficher respectivement 90° et 2, affichages qui résistent au déplacement de *M* et *N*. On « constate » donc …

Peut-il dès lors être tenu pour acquis que les tangentes sont toujours perpendiculaires et que la distance *PQ* est constante « puisque l'outil « Mesures » du logiciel l'atteste » ? À partir de quel moment considère-t-on que l'exercice est « corrigé » ?

S'en tenir là présenterait un intérêt mathématique nul et serait en contradiction flagrante avec le contenu du thème « *Conjecture et démonstration* ». Ce n'est certes pas au moment de la correction de l'exercice que l'apport de l'utilisation d'outils logiciels peut être « mis en évidence ».

Il s'agit au contraire de proposer une démonstration argumentée des deux propriétés résistantes. *Pourquoi* en est-il ainsi ?

Une démarche consiste à commencer par écrire une équation cartésienne des deux tangentes : $y = \mathbf{e}^{a}\left(x - a + 1\right)$ pour l'une et $y = -\mathbf{e}^{-a}\left(x - a - 1\right)$ pour l'autre.

Ces équations facilitent le calcul des abscisses des points *P* et *Q* : $x_P = a - 1$ et $x_Q = a + 1$ d'où l'on déduit : $x_Q - x_P = 2_{\mathit{gjulia}2015}$. Par conséquent : $\overrightarrow{PQ} = 2\vec{i}$ et est un vecteur constant, indépendant de *a*. La distance *PQ* est toujours égale à 2, indépendamment de la position des points *M* et *N*.

Il reste à vérifier l'orthogonalité éventuelle des deux tangentes. Comment savoir si deux droites dont on connaît des équations cartésiennes sont orthogonales ?
Le fait que, dans un repère orthonormal, deux droites d'équations cartésiennes $y = a\,x + b$ et $y = a'\,x + b'$ sont perpendiculaires si et seulement si $a\,a' = -1$ ne figure pas explicitement dans les programmes.
En revanche, on sait que les vecteurs de coordonnées $\left(1,\ \mathbf{e}^{a}\right)$ et $\left(1,\ -\mathbf{e}^{-a}\right)$ sont des vecteurs directeurs respectifs des deux droites. On peut vérifier leur orthogonalité à l'aide du produit scalaire, ou bien vérifier qu'un vecteur de l'une est un vecteur normal de l'autre.

Certes, les calculs ci-dessus peuvent être menés à l'aide d'un logiciel de calcul formel pour se conformer le plus possible aux directives des textes officiels. Mais peut-on parler dans le présent contexte d'apport significatif de cette utilisation ? On peut en douter. Les calculs à effectuer sont justement ici très abordables et certainement plus formateurs pour un élève de terminale scientifique.
Au lecteur d'en décider.

3. Deux scénarios de séance.

Pour préciser à quel moment de l'exercice l'utilisation d'outils logiciels me paraît pertinente, je propose deux scénarios pour une séance consacrée à cet exercice :

Scénario A	Scénario B
1. Chaque élève construit une figure sur papier. La même unité graphique (par exemple 2 cm) est imposée à tout le monde. « Vous choisissez le point *M* sur sa courbe comme vous voulez et *N* est le point de même abscisse de l'autre courbe ». 2. « Comparez la figure que vous avez obtenue avec celle de vos voisins. Observez-vous des propriétés qui se retrouvent dans toutes les figures ? ». Une observation à propos de l'orthogonalité des tangentes est attendue, à propos de la distance *PQ* beaucoup moins, bien que tout le monde ait en principe la même unité graphique. 3. La figure dynamique, préparée par le professeur, est projetée à la classe entière sur un écran. « Reconnaissez-vous les éléments de la figure que vous avez construite ? Quelles conjectures peut-on formuler ? » . 4. Faire avec les élèves une synthèse des conjectures : « Il semble bien que … Comment en être sûr ? » 5. On fait démontrer les conjectures.	1. Les élèves disposent du matériel informatique nécessaire pour construire une figure dynamique, individuellement ou par groupes. La consigne est « Construisez la figure. Vous devez pouvoir déplacer l'un des points *M* ou *N* et l'autre point doit se déplacer en même temps ». Eventuellement, on rappelle la notion de point[1] maître, c'est-à-dire de point créé (on peut le déplacer) dont vont dépendre d'autres points construits (points dépendants, qu'on ne peut pas déplacer de façon autonome, ils ne se déplacent qu'avec le point maître). 2. Déplacez le point maître que vous avez choisi. Qu'observez-vous ? Conjecturez et démontrez.

Quel que soit le scénario, les outils logiciels interviennent pour faciliter les conjectures. Les deux scénarios se clôturent par une phase capitale dans laquelle les outils logiciels sont mis de côté et les conjectures sont démontrées.

La scénario A est plus guidé, le professeur reprend la main plusieurs fois, c'est lui qui anime la figure, qui fait formuler les conjectures et qui, ensuite, relance les élèves pour obtenir une preuve.

Le scénario B est plus ouvert, le professeur doit seulement s'assurer auprès de chaque élève (ou chaque groupe) d'une construction correcte de la figure puis contrôler les conjectures émises. Les élèves ont l'initiative pour démontrer leurs conjectures. Le professeur intervient bien entendu en fin d'activité pour faire avec ses élèves une synthèse des démonstrations proposées.

Le choix du scénario dépend du niveau de classe. L'objectif à long terme est que les élèves soient convaincus de la nécessité de la preuve (donc soient capables de passer de façon autonome à une phase de démonstration, type scénario B). Comme je l'ai déjà souligné dans d'autres sujets, une utilisation d'outils logiciels n'a de sens que si elle aboutit à un questionnement, non si elle aboutit à un constat anesthésiant toute réflexion mathématique.

[1] Plus généralement, un objet maître est un objet géométrique que l'on crée (point le plus souvent, mais aussi droite, cercle, nombre …) et que l'on utilise pour obtenir par des constructions ou des transformations d'autres objets. L'outil « création » fabrique un objet maître tandis que les outils « construction » ou « transformation » fabriquent des objets dépendants.

4. Pour aller plus loin : courbes à sous-tangente constante.

L'auteur du sujet s'est appuyé sur une propriété géométrique des courbes représentatives des fonctions exponentielles.
Voici un petit exercice présentant cette propriété.

1. Soient C et k deux réels non nuls fixés et soit Γ la courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan de la fonction : $x \mapsto f(x) = C\,\mathbf{e}^{kx}$.
Pour tout réel a, on note H le point de coordonnées $(a\,;\,0)$ et M le point d'abscisse a de Γ.
Montrer que la tangente en M à Γ coupe l'axe Ox en un point T tel que : $\overline{HT} = C^{te}$

2. Réciproquement, soit Γ la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur **R** telle que Γ admette en chacun de ses points M une tangente qui coupe l'axe des abscisses en un (unique) point T. On note H le projeté de M sur l'axe Ox parallèlement à Oy.
2.1. Exprimer $\overline{HT}$ en fonction de a. (Cette expression s'appelle la « sous-tangente en M » de la courbe Γ).
2.2. Comment choisir la fonction f de façon que $\overline{HT} = \lambda$ (constante réelle non nulle) ?

Une solution :
1. La tangente en M à Γ a pour équation cartésienne : $y = C\,\mathbf{e}^{ka}(kx - ka + 1)$. L'abscisse du point d'intersection T de cette tangente avec l'axe Ox est : $x_T = a - \dfrac{1}{k}$. On obtient : $\overline{HT} = x_T - x_H = -\dfrac{1}{k}$, ce qui est indépendant de a.

2.1. L'hypothèse que Γ admette en chacun de ses points M une tangente qui coupe l'axe des abscisses en un unique point exige que : $f'(a) \neq 0$ quelle que soit la valeur de a.
La tangente en M à Γ a pour équation cartésienne : $y = f'(a)x + f(a) - a\,f'(a)$. L'abscisse du point d'intersection T de cette tangente avec l'axe Ox est : $x_T = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$. On obtient :

$$\overline{HT} = x_T - x_H = -\frac{f(a)}{f'(a)}$$

2.2. Réciproquement, si $\overline{HT} = \lambda = -\dfrac{f(a)}{f'(a)}$ quel que soit a, alors la fonction f est une solution non nulle de l'équation différentielle : $-\dfrac{f}{f'} = \lambda$, c'est-à-dire de : $f' = -\dfrac{1}{\lambda} f$. La fonction f est une fonction de la forme :

$f(x) = C \exp\left(-\dfrac{x}{\lambda}\right)$ où C est une constante non nulle.

La propriété d'avoir une sous-tangente constante caractérise les courbes représentatives des fonctions de la forme : $x \mapsto f(x) = C\,\mathbf{e}^{kx}$ où C et k sont deux réels non nuls.

L'auteur de l'exercice proposé par le jury a en quelque sorte « mis bout à bout » deux sous-tangentes à de telles courbes pour avoir une longueur PQ constante.

Le choix des fonctions $f(x) = \mathbf{e}^{x}$ et $g(x) = \mathbf{e}^{-x}$ amène une propriété supplémentaire d'orthogonalité des tangentes et permet à l'auteur du sujet de faire « d'une pierre deux coups ».