ESD 2015 – 10 : Arithmétique

Ce sujet rappelle point par point un sujet d'épreuve sur dossier posé en 2012 (le sujet 2012_05). Dans sa préparation, le candidat a tout intérêt à confronter les deux sujets. Il pourra aussi, une fois les deux sujets traités, comparer les deux corrections car j'ai rédigé celle-ci avant de m'apercevoir qu'un exercice identique avait déjà été posé.

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Le 7 décembre 2014, un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A qui apparaît périodiquement tous les 105 jours.
Six jours plus tard $(J_0 + 6)$, il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours.
On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.

1. Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?
2. Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, aura-t-il la possibilité d'observer une nouvelle conjonction des deux astres avant fin 2020 ?

B. Les réponses de deux élèves à la question 1

Élève 1

J'ai fait une colonne pour le corps céleste A et une colonne pour le corps céleste B.
J'ai tapé dans A2 la formule $= A1 + 105$ et dans B2 la formule $= B1 + 81$, puis j'ai recopié vers le bas.

On voit 735 dans les deux colonnes.
Il s'écoulera donc 735 jours, soit 2 ans et 5 jours, entre J_0 et J_1.

J_1 sera le 12 décembre 2016.

	A	B
1	0	6
2	105	87
3	210	168
4	315	249
5	420	330
6	525	411
7	630	492
8	735	573
9	840	654
10	945	735
11	1050	816

Élève 2

Le problème revient à résoudre $105x - 81y = 6$ ce qui équivaut à $35x - 27y = 2$.
$35x - 27y = 2$ équivaut à $35x = 2 + 27y$ ce qui revient à $35x \equiv 2\,[27]$ ou encore $8x \equiv 2\,[27]$ c'est-à-dire $4x \equiv 1\,[27]$; avec ma calculatrice j'ai trouvé $x \equiv 7\,[27]$. Donc $x = 7 + 27k$.
$35x - 27y = 2$ équivaut à $27y = -2 + 35x$ ce qui revient à $27y \equiv -2\,[35]$ ou encore $-8y \equiv -2\,[35]$ c'est-à-dire $4y \equiv 1\,[35]$; avec ma calculatrice j'ai trouvé $y \equiv 9\,[35]$. Donc $y = 9 + 35k$.
En posant $k = 0$, je trouve $x = 7$.
Donc il se sera écoulé $105 \times 7 = 735$ jours entre J_0 et J_1.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence les compétences acquises et leurs erreurs éventuelles.

2. Exposez une correction de l'exercice comme vous le feriez avec une classe de terminale scientifique.

3. Proposez deux ou trois exercices sur le thème *arithmétique*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

2. Eléments de correction

Voici un exercice en relation directe avec le « théorème des restes chinois », théorème traitant d'un système de deux ou plusieurs congruences simultanées.
Le problème posé revient en effet à chercher quels sont les deux premiers entiers naturels n vérifiant simultanément : $\begin{cases} n \equiv 0 \mod 105 \\ n \equiv 6 \mod 81 \end{cases}$.
Rechercher uniquement les deux premiers entiers vérifiant le système de congruences semble limiter la portée de cet exercice, une résolution complète du système de congruences ne paraissant pas *a priori* indispensable pour donner les deux réponses. En réalité, il n'en est rien. Compte tenu de l'écart entre deux entiers consécutifs solutions, égal à 2835, une solution de recherche exhaustive est défavorisée, il est difficile de faire l'économie d'une étude arithmétique.

L'enseignant est de plus libre de demander aux élèves, pour clore l'exercice, quel est « l'ensemble des » entiers n vérifiant la double congruence. Là, le recours à une étude arithmétique devient inévitable.

1. Chacun des deux élèves représente une démarche spécifique.

Elève 1
Cet élève construit une simulation pertinente sur tableur. Sa démarche consiste à construire sur tableur puis à comparer les suites d'entiers correspondant aux jours d'apparition de chacun des deux « objets célestes » et à relever la première coïncidence. Cette démarche est correcte et aboutie. Sa production témoigne d'une compétence avérée : « élaborer une simulation numérique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel ». On ne relève qu'une erreur bénigne : le jour d'apparition (qui n'était pas demandé d'ailleurs) est incorrect car cet élève n'a pas tenu compte du fait que 2016 est bissextile.
L'inconvénient de cette démarche est qu'elle dispense de tout recours à l'arithmétique (on ne peut donc relever aucune « compétence » en arithmétique …)

Elève 2
Cet élève traduit en langage mathématique la situation à étudier.
Il désigne implicitement par x et par y le nombre de passages observables de chaque astre depuis leur passage initial et écrit une relation correcte liant x et y pour qu'il y ait conjonction (rien ne permet de savoir si cette relation résulte ou non de deux congruences simultanées).
Il transforme la relation obtenue par deux congruences, l'une modulo 27 et l'autre modulo 35. Il commet une erreur en écrivant que la relation $35x - 27y = 2$ est *équivalente* à la congruence $8x \equiv 2 \ (27)$ de même qu'à la congruence $-8y \equiv -2 \ (35)$ alors qu'il ne s'agit que d'implications. À cet instant de sa démarche, les deux congruences sont donc dissociées l'une de l'autre.
Cet élève résout correctement chacune des deux congruences en recherchant une solution particulière de chacune des deux à l'aide de sa calculatrice (il a dû tabuler des résultats de congruences « $4x \equiv ....$ » pour les premiers entiers jusqu'à en trouver une dont le résultat est 1).
L'erreur commise est neutralisée car cet élève emploie la même lettre k pour désigner l'entier figurant dans l'expression générale des solutions en x et celui figurant dans l'expression générale des solutions en x (alors que dans sa démarche, il s'agit de deux entiers indépendants). C'est la raison pour laquelle son résultat final semble correct malgré des erreurs dans la résolution.
Quelques zones d'ombre subsistent également : comment est-il passé de $8x \equiv 2 \ (27)$ à $4x \equiv 1 \ (27)$ par exemple, qu'aurait-il fait pour $8x \equiv 2 \ (26)$?

Cet élève semble maîtriser le concept de « congruence » (savoir) ainsi que son utilisation en tant qu'outil (savoir faire). Il sait résoudre une congruence de la forme $a\,x \equiv b \ (n)$ en neutralisant le coefficient a par une recherche exhaustive à la calculatrice (savoir faire). Ainsi, cet élève est capable de réinvestir la notion de congruences de façon autonome comme outil de résolution dans d'autres problèmes (compétence).

Cet élève doit cependant travailler les notions de logique : distinction entre implication simple et équivalence, pour mieux mesurer l'impact de l'utilisation d'une congruence dans des contextes similaires à celui-ci. L'enseignant peut demander à cet élève comment se fait-il que, alors que l'équation initialement écrite détermine une relation de dépendance entre x et y, après traitement par congruence, on obtient une condition portant sur x uniquement. Cette condition est-elle « nécessaire », « suffisante » ou « nécessaire et suffisante » ?

2. La correction de l'exercice peut s'appuyer tantôt sur la production de l'élève 1, tantôt sur la production de l'élève 2.
Pour corriger la question 1, il n'y a aucun inconvénient à reprendre la démarche de l'élève 1. Les colonnes du tableur présentent exhaustivement les jours où chaque objet céleste est observable. Le 735$^{\text{ème}}$ jour est celui du septième passage de l'astre A après son passage initial et ce même jour est aussi celui du neuvième passage de l'astre B après son passage initial. On garde précieusement ces informations sous le coude.

On peut alors souligner les déficiences de cette démarche : si on veut trouver de nouvelles coïncidences, il faudra « tirer vers le bas » très loin. Déjà, J_1 est difficile à repérer et si on veut aller plus loin, ce sera pire. Il s'agit d'une solution qui ne permettra de déterminer que les deux ou trois premières conjonctions avec un gros risque de ne pas les remarquer.

Une solution mathématique comme celle de l'élève 2 sera à terme plus efficace, c'est elle que l'on va promouvoir. On peut développer cette solution en quatre points :

1. On commencera par expliquer d'où vient l'équation diophantienne de l'élève 1.
Une date D donnée correspond à une conjonction entre les deux astres si et seulement le nombre de jours j écoulés depuis le début des observations est un entier naturel qui vérifie simultanément : $\begin{cases} j \equiv 0 \mod 105 \\ j \equiv 6 \mod 81 \end{cases}$ ce qui équivaut au fait qu'il existe deux entiers naturels x et y vérifiant : $\begin{cases} j = 105x \\ j = 6 + 81y \end{cases}$

C'est pourquoi on est amené à résoudre dans $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ l'équation $105x - 81y = 6$, équation équivalente à $35x - 27y = 2$ (Equation E) et à en retenir les couples solutions formés de deux entiers naturels.

2. On met en évidence une solution particulière que l'on utilise pour transformer l'équation E :
L'étude faite sur tableur permet de proposer une solution particulière de l'équation E, le couple $(x_0 = 7\ ;\ y_0 = 9)$ sans avoir à mettre en œuvre une méthode de recherche.
Il s'ensuit que un couple (x, y) est solution de E si et seulement si : $35(x-7) = 27(y-9)$.

3. On applique le théorème de Gauss pour caractériser les couples solutions : « puisque 27 est premier avec 35, il divise $(x-7)$, etc.…
On conclue qu'un couple (x, y) d'entiers relatifs est solution de E si et seulement si il existe un entier relatif k tel que : $\begin{cases} x = 7 + 27k \\ y = 9 + 35k \end{cases}$ et ce couple est un couple d'entiers naturels si et seulement si k est lui-même entier naturel. En particulier, avec $k = 0$ on obtient le couple $(7,\ 9)$ associé à la conjonction J_0 et avec $k = 1$ on obtient le couple $(34;\ 44)$ associé à la conjonction J_1.

4. On en tire une conclusion : les dates de conjonction se produisent $735 + 2835k$ jours après le 7 décembre 2014 (où k est un entier naturel) et la conjonction J_1 se produit 3570 jours après cette date ($j_1 = 105 \times 34 = 6 + 81 \times 44 = 3570$).
Si l'astronome manque le premier rendez-vous, il devra attendre plus de 7 ans pour en observer un autre (jusqu'en 2023).

3. Voir (entre autres) REDCM pages 103 à 117.

3. Commentaires

1. Comme je l'ai signalé, l'enseignant peut demander à ses élèves de rechercher *toutes* les conjonctions des deux astres. Il est honnête dans ce cas de relativiser la portée d'une telle recherche :

Les données 81 et 105 sont nécessairement des valeurs approchées. En conséquence, si on peut espérer un résultat à peu près correct pour les premières conjonctions, une déviation à moyen terme par rapport à la prévision semble inexorable. Rechercher toutes les conjonctions gjulia2015 procure une « satisfaction mathématique » purement platonique.

Toutefois, il est exact que certains corps célestes, satellites d'un même astre, ont des périodes orbitales commensurables (c'est-à-dire que le rapport de leurs périodes est un nombre rationnel) ; c'est par exemple le cas de Pluton qui effectue deux révolutions autour du Soleil pendant que Neptune en effectue trois.

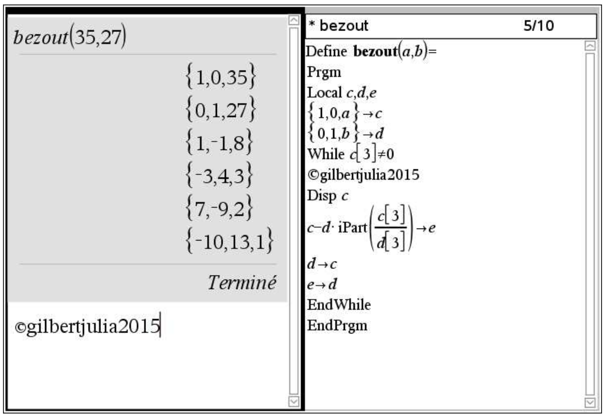
2. Dans la correction, j'ai exploité une solution particulière donnée par le tableur de l'élève 1 ; la question se pose : « Et si on n'avait pas eu le tableur, comment aurait-on fait ? ». Si le candidat n'y pense pas, il y a une forte probabilité que le jury y pense pour lui.

Il faut aller chercher l'algorithme d'Euclide étendu qui donne, deux entiers non nuls a et b étant donnés, un exemple de couple d'entiers u et v vérifiant : $a\,u + b\,v = D$ où D est le PGCD de a et b.

On trouve dans les manuels plusieurs procédés (programmes, listes, suites, …) qui effectuent le travail. L'article « algorithme d'Euclide étendu » de Wikipedia est par exemple très bien fait. Il appartient à chaque candidat d'étudier ce sujet et de construire lui-même son propre algorithme opérationnel sur sa calculatrice.

Pour mémoire, ci-contre une mouture sous forme de programme qui fonctionne pour a et b entiers strictement positifs.
Cette mouture donne la relation : $(-10)\times 35 + 13\times 27 = 1$ d'où on déduit : $(-20)\times 35 + (-26)\times(-27) = 2$

On obtient le couple solution particulière $(-20, -26)$, ce n'est pas le même que celui donné par le tableur.
La solution générale aurait été exprimée ainsi :
$\begin{cases} x = -20 + 27k \\ y = -26 + 35k \end{cases}$ avec k entier strictement positif pour obtenir les solutions entières naturelles.



La même mouture sous forme de fonction de deux variables, qui renvoie une matrice ligne $[u, v]$