ESD 2015 –09 : Optimisation

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Un secteur circulaire a pour périmètre p où p désigne un nombre réel strictement positif fixé.
Quelle doit être la mesure de son angle au centre α pour que son aire soit la plus grande possible ?

NB. Une figure non reproduite ici accompagne le texte

B. Les réponses proposées par deux élèves de première S

Elève 1.
Je construis la figure avec un logiciel. Pour simplifier, je prends $p=10$. Je construis *A* et *B*, et je prends *C* sur le cercle de centre *A* passant par *B*. J'affiche le périmètre du secteur et je fais varier *C* pour que le périmètre soit égal à 10. Ensuite j'affiche l'aire, et je recommence avec d'autres positions de *B*. L'aire est la plus grande quand le rayon est entre 2 et 3.

Élève 2
J'ai trouvé les formules du périmètre et de l'aire sur internet : $p = r(2+\alpha)$ et $S = \frac{1}{2}\alpha r^2$
J'en déduis $S = \frac{1}{2}p^2 \times \frac{\alpha}{(2+\alpha)^2}$
Je cherche le maximum de la courbe avec ma calculatrice, et je trouve que α vaut à peu près 2.
J'ai dû me tromper car avec un angle de 2°, l'aire est trop petite.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs compétences et en précisant l'aide qui pourrait leur permettre de mener à bien leur démarche.

2. Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique, en vous appuyant sur les productions des élèves.

3. Proposez deux exercices sur le thème *optimisation*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

2. Eléments de correction

Voici un exemple caractéristique de « problème ouvert ». Son énoncé est très court, (presque) aucune piste de résolution n'est suggérée et aucune solution évidente ne peut émerger. Il pourrait tout aussi bien être rangé dans les « problèmes avec prise d'initiative » d'autant que les deux élèves en font preuve. On peut supposer qu'il n'a pas été classé dans cette rubrique car le texte de l'énoncé incite fortement à choisir l'angle au centre comme paramètre décrivant la situation alors que ce n'est pas le seul candidat (on va y revenir).
Il est normal que la classification de tels problèmes dans un thème plutôt qu'un autre soit quelque peu arbitraire compte tenu de leur polyvalence.

1. *Elève 1 :*
Cet élève opte pou une démarche basée sur l'utilisation d'un logiciel de géométrie. Cependant, la figure qu'il construit n'est pas une figure dynamique. Le point *B* étant fixé, il ajuste en effet « à la souris » la position de *C* de façon à obtenir un périmètre le plus voisin possible de 10. Cette figure ne résiste pas à la déformation.

Le logiciel lui permet seulement d'associer relativement rapidement une valeur approximative de l'angle au centre à certaines valeurs du rayon *AB*

Pour cette raison, cette démarche est plutôt à considérer comme une démarche empirique du type « essais et corrections d'erreurs ». On peut supposer qu'il a testé plusieurs valeurs du rayon en prêtant attention à l'affichage de l'aire et en « corrigeant le tir » au fur et à mesure : « plus grande … plus petite … »

On peut à la rigueur dire de lui qu'il sait « expérimenter en utilisant des outils logiciels » mais non qu'il sait « élaborer une simulation géométrique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel ».

Cet élève ne s'est engagé dans aucune réflexion mathématique (il faudrait l'y inciter : lui dire de laisser là son logiciel et de se mettre à réfléchir serait peut-être l'aide la plus pertinente qu'on peut proposer …).

Elève 2 :
Cet élève fait preuve de « compétences transversales » puisqu'il prend l'initiative de rechercher sur internet l'information qui lui manque. Cette initiative est justifiée, les formules relatives à un secteur circulaire ne sont pas utiles tous les jours …
Les formules trouvées lui permettent de proposer une modélisation par une fonction. Il construit une fonction objectif pertinente dont il décide de faire une étude graphique.
Cet élève a su aller chercher l'information utile, modéliser, effectuer un traitement mathématique. Un exemple de « tâche complexe » en somme.

Mais le mieux est ennemi du bien dit-on, il a voulu émettre une réserve sur un résultat « d'un angle de 2° », témoignant en cela d'une compétence avérée : savoir contrôler ses calculs et critiquer un résultat. En faisant preuve d'un tel esprit critique, il met en évidence sa conception incorrecte de la mesure d'angle. Il a considéré que dans les formules trouvées sur internet, l'unité de mesure d'angle était le degré. En revenant au contexte, le résultat lui a paru (à juste titre …) invraisemblable.
Cette erreur s'explique par le fait que, tout au long du collège, les angles sont mesurés en degrés. Le degré est l'unité de mesure d'angle la plus familière alors que le radian est pour cet élève une unité de mesure nouvelle qu'il a sans doute encore très peu utilisée et à laquelle il n'a pas pensé spontanément.

Il y a deux aides à apporter à cet élève :

- D'une part lui dire d'aller à nouveau sur internet pour s'enquérir des unités de mesure d'angle, en particulier de celle qui est employée dans les formules qu'il a trouvées.
- D'autre part lui demander comment il pourrait préciser sa réponse (quel traitement mathématique de la fonction qu'il a obtenue pourrait permettre de déterminer avec précision le maximum).

Aucune des deux démarches n'a en effet abouti, à des degrés différents toutefois. Les deux élèves se rejoignent sur un constat d'existence d'un maximum mais ne procèdent pas à une détermination de ce maximum.

- L'élève 1 confond conjecture et démonstration. Il propose un encadrement de la valeur de l'angle maximisant l'aire mais ne fournit aucun argument permettant de justifier son affirmation. Cet élève s'en tient à une phase expérimentale. Un exemple de mathématiques du « je-vois-que ».
- L'élève 2 est beaucoup plus proche de l'aboutissement. Sa conclusion reste imprécise : « à peu près 2 ». Il faudrait lui demander comment il a fait pour « chercher le maximum de la courbe » (en corrigeant au passage son vocabulaire : une courbe peut avoir un *sommet* et une *fonction* numérique un maximum). L'hypothèse la plus probable est qu'il a regardé à l'écran l'allure de la courbe obtenue. Dans ce cas la démarche est clairement inaboutie, sa conclusion relevant du « je-vois-que ». Il aurait pu aussi activer l'outil « maximum d'une fonction » de sa calculatrice, ce qui est une démarche valide pour déterminer un maximum dont on a justifié l'unicité par ailleurs. Dans ce cas sa procédure serait aboutie (on peut considérer l'unicité comme implicite). Mais cette hypothèse est beaucoup moins probable, sinon il l'aurait écrit « exactement 2 ».

2. La production de l'élève 1 ne présentant pas de figure dynamique, on ne peut s'y appuyer pour initier une correction (on y reviendra plus tard).
C'est l'élève 2 qui fournit le point de départ le plus pertinent avec les deux formules : gilbertjulia2015 $p = r(2+\alpha)$ et $S = \frac{1}{2}\alpha r^2$

À cette occasion, on revient sur l'unité de mesure d'angle utilisée dans ces formules. Il s'agit du radian. Lorsque l'angle au centre mesure 1 radian, le côté curviligne du secteur circulaire a une longueur égale au rayon du cercle.

Lorsque p est fixé, il y a deux paramètres qui peuvent, l'un comme l'autre, décrire la situation : la mesure de l'angle au centre ou bien la longueur du rayon. Le contexte suggère de choisir plutôt la mesure de l'angle au centre.

Cependant, il peut être intéressant de mener en parallèle chacune des deux options :

	Angle au centre α gjulia2015	Longueur du rayon r
Ensemble de définition	$[0\ ;\ 2\pi]$	$\left[0\ ;\ \frac{p}{2}\right]$
Expression du paramètre non choisi	$r = \frac{p}{2+\alpha}$	$\alpha = \frac{p}{r} - 2$
Expression de l'aire	$S_1(\alpha) = \frac{p^2}{2} \times \frac{\alpha}{(2+\alpha)^2}$	$S_2(r) = p\,r - 2r^2$
Avantages et inconvénients	S_1 est une fonction rationnelle dont l'étude présente quelques difficultés	S_2 est une fonction polynôme du deuxième degré plus facile à étudier que S_1. Mais il faudra calculer la valeur de α gjulia2015 correspondant à la valeur de r qui réalise le maximum.
Traitement mathématique	La dérivée $S'_1(\alpha) = \frac{p^2}{2} \times \frac{2-\alpha}{(2+\alpha)^3}$ est du même signe que $2-\alpha$. S_1 est maximale quand $\alpha = 2$ et dans ce cas l'aire est égale à $\frac{p^2}{16}$ et le rayon est $r = \frac{p}{4}$	D'après les résultats usuels sur le deuxième degré, S_2 est maximale quand $r = \frac{p}{4}$. Dans ce cas, l'aire est égale à $\frac{p^2}{16}$ et l'angle au centre est : $\alpha = 2$

Les deux options se rejoignent sur un même cas de figure optimale (le contraire eût été inquiétant …).

En conclusion, on pourra dire que chacun garde la main pour le choix d'un paramètre adéquat. Le paramètre suggéré par l'énoncé n'est pas toujours le paramètre qui décrit le plus facilement la situation.

C'est à ce moment que l'on peut éventuellement exploiter la production de l'élève 1, en se proposant de construire une figure qui va valider notre résultat. Le choix $p = 10$ est pertinent, on ne le change pas (fixer p ne restreint pas la généralité).

- Une option « basse » est de proposer à l'élève 1 de construire sa figure lorsque $AB = 2{,}5$ et de constater que l'aire obtenue est supérieure aux autres valeurs de l'aire qu'il a obtenues.
- Une option « haute » est de proposer de dynamiser la figure de l'élève 1. Pour cela, il faut d'une façon ou d'une autre assurer une liaison de dépendance entre le rayon et l'angle au centre.

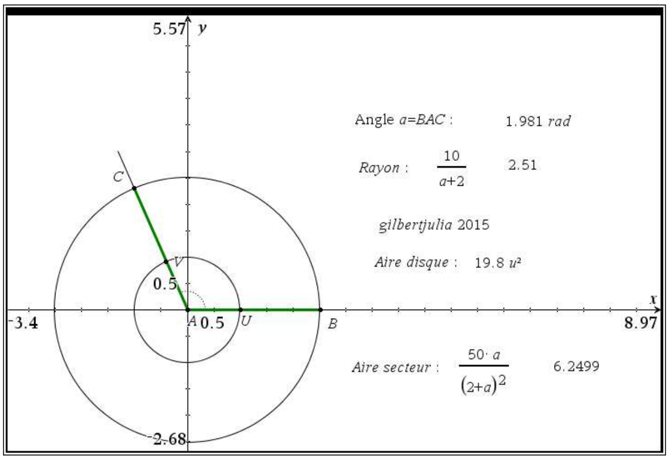
La construction ci-contre a été réalisée de la façon suivante :

Dans une page « Graphiques » on a créé le cercle unité. Le point V est un point sur le cercle unité. On a mesuré l'angle $U\hat{A}V$, mesure désignée par a puis calculé en fonction de a le rayon $\frac{10}{2+a}$ du secteur (réalisant ainsi la liaison entre angle et rayon)

Puis on reporté ce rayon sur l'axe des abscisses (report de mesure, point B).

Le point C est le point d'intersection du cercle de centre A passant par B avec la demi-droite $[AV]$.

Il ne reste plus qu'à effectuer les calculs utiles puis à animer le point V.



3. Commentaires

Le jury du CAPES aurait souhaité évaluer un certain esprit critique et une certaine distanciation des candidats par rapport au discours officiel qu'il ne s'y serait pas pris autrement.

Certes, « *l'utilisation de logiciels, d'outils de visualisation et de simulation, de calcul (formel ou scientifique) et de programmation change profondément la nature de l'enseignement en favorisant une démarche d'investigation* ». Certes aussi « *l'aptitude à mobiliser l'outil informatique dans le cadre de la résolution de problèmes est à évaluer* ».

Mais il ne faut pas confondre « démarche d'investigation » et « bidouillage ». Le premier élève est nettement dans le deuxième cas. Si cet élève en reste là, il serait illusoire de penser que sa « résolution » va développer d'une quelconque façon sa culture mathématique. Bien au contraire, son attitude risque de le conforter dans une logique du « je-vois-que », logique qui privilégie la croyance au détriment de la preuve. Aussi, parler en ce qui le concerne de « compétences » me semble être pure langue de bois.

On ne peut parler de démarche d'investigation que si une phase d'expérimentation amène à un questionnement et à une réflexion mathématique.

Quant au deuxième élève, le recours à un logiciel fait aussi échouer sa démarche alors qu'il avait les cartes en main pour la finaliser. Il avait clairement identifié une fonction objectif pertinente et même en avait donné l'expression optimale $S = \frac{1}{2} p^2 \times \frac{\alpha}{(2+\alpha)^2}$, isolant les termes en alpha. Au lieu de continuer par un calcul de dérivée (il s'agit d'un élève de première S) qui lui aurait permis de conclure, il change de mode de représentation pour passer à une étude graphique qui l'amène à une résolution empirique : selon lui, « on-voit-que » la courbe a un sommet et la fonction un maximum. Ce changement de mode de représentation s'avère inopportun.