ESD 2015 –08 : Probabilités

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Un commerçant vend des boîtes de thé dont 80 % proviennent d'un fournisseur A et 20 % d'un fournisseur B. 10 % des boîtes provenant du fournisseur A et 20 % de celles provenant du fournisseur B contiennent des pesticides.

1. Le commerçant considère que 88 % des boîtes de thé qu'il vend ne contiennent pas de pesticides. A-t-il raison ?

2. Lorsqu'on achète 10 boîtes de thé chez ce commerçant, on peut assimiler cet achat à un tirage aléatoire avec remise compte tenu de l'importance du stock. Quelle est la probabilité que, sur 10 boîtes achetées, au moins huit ne contiennent pas de pesticides ?

3. À des fins publicitaires, le commerçant affiche sur ses plaquettes « 97 % de notre thé est garanti sans pesticides ». Un inspecteur de la brigade de répression des fraudes souhaite étudier la validité de l'affirmation.
À cette fin, il prélève 200 boîtes au hasard dans le stock du commerçant et en trouve 23 contenant des pesticides. Au vu de ces résultats, quelle peut être la réaction de l'inspecteur de la brigade de répression des fraudes ?

B. Les réponses de deux élèves à la question 2

Élève 1

J'ai reconnu la loi binomiale : $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ avec $n=10$, $p=0{,}88$ et $k=8$.
La probabilité est donc environ $0{,}233$.

Élève 2

J'utilise la loi binomiale. Le succès S correspond à « 8 boîtes sur 10 ne contiennent pas de pesticides » et l'échec $\overline{S}$ correspond à « plus de deux boîtes contiennent des pesticides ».
On doit calculer $P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)$.
J'utilise la calculatrice *binomFdp(n,p,k)* avec $n=10$, $p=0{,}8$ et $k=8$
puis : *binomFdp(n,p,k)* avec $n=10$, $p=0{,}9$ et $k=9$
et enfin : *binomFdp(n,p,k)* avec $n=10$, $p=1$ et $k=10$.
On obtient : $P(X\geq 8)\approx 0{,}302+0{,}387+1\approx 1{,}689$, puis on calcule la moyenne : $1{,}689/3=0{,}563$.
Donc on a 56 % de chances d'avoir au moins 8 boîtes sur 10 ne contenant pas de pesticides.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs.

2. Présentez une correction de la question 3 telle que vous l'exposeriez devant des élèves.

3. Proposez deux exercices sur le thème *probabilités* à des niveaux de classe différents. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

2. Eléments de correction

Cet exercice visite en trois questions pratiquement indépendantes trois rubriques différentes des programmes de probabilités des classes de première et de terminale.

- La première question porte sur le conditionnement : calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers (classe de terminale).
- La deuxième question porte sur l'utilisation d'une loi binomiale : calculer la probabilité d'un évènement du type « $X \geq k$ » (classe de première). Cette question permet en outre de travailler sur le sens de l'évènement « au moins … ».
- La troisième question porte sur la notion de prise de décision à l'aide d'un intervalle de fluctuation (classe de terminale).

Compte tenu de ces caractéristiques, il s'agit plutôt d'un exercice destiné à faire un bilan à l'issue du chapitre « probabilités » ou permettant à un instant donné une évaluation de connaissances.

Soulignons la témérité du commerçant qui ose afficher un pourcentage, même faux, de sans pesticide, ce qui sous entend qu'une partie de son thé en contient (voir note en fin de document). Rendons lui aussi hommage car son pourcentage a un sens. Force est en effet de constater que les publicitaires sont friands de chiffres, particulièrement de pourcentages n'ayant aucun sens. Un régime amaigrissant célèbre ne promettait-il pas récemment de « perdre 30 % en plus » (on ne sait s'il s'agit de graisse ou de contenu de porte-monnaie) ? Mais je m'égare …

1. Analyse des travaux d'élèves

Dans la question 2, il s'agit de reconnaître une situation relevant de la loi binomiale (répétition d'expériences identiques et indépendantes dans lesquelles on considère comme étant un « succès » le fait de choisir une boîte de thé sans pesticide ».

Les élèves doivent reconnaître que le nombre X de boîtes sans pesticide parmi les 10 achetées suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$; $p = 0{,}88$.

Ils doivent également prendre en compte que l'évènement « $X \geq 8$ » est l'évènement : « $X = 8$ *ou* $X = 9$ *ou* $X = 10$ ».

Elève 1.

Résultat incorrect en raison d'une non compréhension de la question posée.

Réussites :

- Cet élève a clairement identifié la loi binomiale suivie par X (on comprend, mais l'élève aurait dû le préciser explicitement, que X représente bien le nombre de boîtes sans pesticide).
- Il sait calculer à l'aide de sa calculatrice, la probabilité d'un évènement du type $X = k$. Il a calculé la probabilité : $P(X = 8)$. Le résultat, qu'il a convenablement arrondi, est correct.

Echecs :

Cet élève n'a pas compris le sens de la question. En négligeant les termes « **au moins** 8 », cet élève fait la confusion entre l'évènement « $X \geq 8$ » et l'évènement « $X = 8$ ».

Il faudrait lui faire relire la question et lui demander s'il y a une différence de sens entre « obtenir exactement 8 boîtes sans pesticide » et « obtenir au moins 8 boîtes sans pesticide » (lui demander combien il peut y en avoir pour qu'il soit amené à formuler lui-même : … ou bien … ou bien …, ce qui fera référence, on l'espère à une réunion d'évènements disjoints).

Elève 2.

Résultat incorrect en raison d'insuffisances graves au niveau du traitement mathématique de la question posée (non maîtrise de savoirs et savoir faire liés aux probabilités).

Réussites :

- Cet élève a compris le sens de l'évènement « $X \geq 8$ » en l'interprétant correctement comme étant une réunion : « $X = 8$ *ou* $X = 9$ *ou* $X = 10$ ».

- Dès lors qu'il connaît les paramètres $, n, p, k$, il sait calculer, à l'aide de sa calculatrice, une probabilité liée à la loi binomiale.

Echecs :
On note des insuffisances graves dans la maîtrise des savoirs et savoir faire :

- Sur la notion de loi binomiale qui n'est pas liée à la répétition d'expériences *identiques et indépendantes*.
- Sur la notion même de probabilité d'un évènement. D'une part, le calcul de la probabilité de l'évènement « $X = 8$ » contient une référence circulaire (le paramètre $p = 0{,}8$ provient de « 8 boules sur 10 ») et il en est de même des deux autres évènements qu'il considère. D'autre part, la probabilité $p = 1$ provenant de « 10 boules sur 10 » ne crée aucune alerte. Seul, le résultat $P(X \geq 8) \approx 1{,}689$ plus grand que 1 (obtenu par addition des probabilités, ce qui en effet correspond bien au calcul de la probabilité d'une réunion disjointe) semble créer une alerte, puisque l'élève « fait la moyenne des probabilités ». On peut conjecturer que cette action lui a semblé être « la plus plausible » pour se ramener à un résultat compris entre 0 et 1.

La production de cet élève montre qu'il est illusoire d'insister sur l'automatisation de calculs et sur l'utilisation « *d'une calculatrice ou d'un logiciel pour obtenir les valeurs des coefficients binomiaux, calculer directement des probabilités* » comme le demande explicitement le programme si, en amont, il n'y pas un travail approfondi sur le sens. Manifestement, cet élève sait calculer des probabilités liées à la loi binomiale mais ne sait pas identifier correctement les paramètres de situations en relevant. Son savoir faire est de ce fait inopérant.

Il serait nécessaire, pour cet élève, de revenir, dans l'urgence de cet exercice, sur la reconnaissance de situations relevant de la loi binomiale et l'identification de leurs paramètres. À plus longue échéance, les savoirs fondamentaux, à commencer par la notion de probabilité d'un évènement, sont à retravailler.

2. Correction de la question 3.
Il s'agit dans cette correction de détailler avec les élèves quelle est la démarche de l'inspecteur des fraudes. C'est une question de prise de décision qui peut éventuellement servir de situation de référence.

- L'inspecteur admet l'hypothèse qu'il est en présence d'un stock de boîtes de thé tel que la proportion *p* de boîtes contenant des pesticides est égale à 0,03 (comme l'indique la publicité).
- Pour que son contrôle soit légitime, il doit prélever, selon les critères usuels de légitimité d'un test, un échantillon de taille $n \geq 30$ telle que de plus : $0{,}03n \geq 5$. Donc il doit prélever au moins 167 boîtes. La taille de l'échantillon prélevé par l'inspecteur, en l'occurrence 200, n'est donc pas choisie au hasard. Disons que c'est un « minimum syndical » pour justifier la validité du test. (Cet exercice fournit l'occasion de se pencher sur les conditions de validité d'un test, une probabilité supposée égale à 0,03, ce n'est pas banal. Il ne faut pas gâcher cette occasion).
- L'inspecteur détermine un *intervalle de fluctuation* asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence. Il s'agit de l'intervalle $\left[p - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \ ; \ p + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$ sous l'hypothèse d'une proportion *p* de boîtes avec pesticides égale à 0,03. Il obtient ainsi l'intervalle $[0{,}006 \ ; \ 0{,}054]$ en arrondissant respectivement par défaut et par excès les bornes inférieure et supérieure de l'intervalle.
- Il calcule la fréquence *f* de boîtes avec pesticides de son échantillon : $f = 0{,}115$ et la situe par rapport à l'intervalle de fluctuation.

Cette fréquence étant en dehors de l'intervalle de fluctuation, l'inspecteur peut décider de considérer comme mensongère la publicité du commerçant.

La situation permet à l'enseignant d'introduire d'autres seuils que le seuil 95 %. Il paraît opportun dans ce contexte d'évoquer le seuil 99 %, où l'on est amené à remplacer le coefficient 1,96 par le coefficient 2,58 et

la borne 0,054 par la borne 0,062 (il faut que l'inspecteur soit sûr de lui avant d'affirmer que la publicité est mensongère …).
Ce changement de seuil ne change pas le verdict de prise de décision, la fréquence observée est encore nettement en dehors de l'intervalle de fluctuation. L'inspecteur a toute raison de considérer la publicité comme mensongère.

Pour terminer, on peut proposer de déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence sous l'hypothèse $p = 0{,}12$ (c'est-à-dire en se plaçant du point de vue du commerçant). Cet intervalle est $_{gjulia2015}$ $[0{,}074 ; 0{,}166]$, intervalle qui est disjoint de l'intervalle « inspecteur ». Autrement dit, le commerçant aurait pu prévoir que l'inspecteur allait obtenir entre 15 et 33 boîtes parmi 200 avec pesticides. En affichant 97 %, le commerçant était quasiment certain de se faire gauler au premier contrôle.

3. Commentaire

Voici un exercice sans fioriture ni prétention, mais que l'enseignant peut exploiter avec profit auprès de ses élèves pour dresser un bilan assez varié des connaissances sur le thème « probabilités ». En trois questions à l'habillage très sobre[1], on visite bonne part des contenus des classes de fin de lycée. L'enseignant a tout intérêt à annoncer la couleur à ses élèves : « voici un exercice qui va me permettre de savoir ce que vous avez appris et ce qu'il nous reste à travailler. Il y a trois questions indépendantes auxquelles vous devrez répondre de votre mieux en expliquant votre démarche ». Au vu de la façon dont les élèves répondent à la question 2, on imagine que c'est bien ainsi que l'exercice a été présenté, les deux élèves font un réel effort pour expliquer leur démarche. Au vu de la production de l'élève 2, cet enseignant a du pain sur la planche.

[1] L'enseignant peut saisir l'occasion pour faire faire des recherches sur la vraisemblance des hypothèses émises en début d'énoncé : « Pensez-vous plausible que tant de thé contienne des pesticides (on peut en préciser le sens : « le taux de pesticides dépasse le seuil autorisé » par exemple) ? Allez voir sur internet si la présence de pesticides dans les thés qui sont vendus sur le marché est si fréquente ».
J'invite le lecteur à contrôler lui-même cette vraisemblance et à vérifier que le taux affiché de 97 % de thé sans pesticide est de nature à attirer le premier inspecteur passant par là.

Une petite digression concernant les pesticides. J'habite dans une région agricole vouée dans les années 1960 /2000 à la quasi monoculture du pêcher. Au mois de mars, moment de la floraison, la campagne était à l'époque uniformément rose, offrant aux photographes de magnifiques photos du Canigou enneigé, dominant les champs de pêchers en fleurs. Cette ère est irrémédiablement révolue. Les plants de variétés américaines, très productifs, demandaient des traitements phytosanitaires fréquents (une moyenne de 8 par an, parfois jusqu'à 14 ; en février, avant la floraison, on distinguait nettement dans la plaine les aérosols diffusés par les atomiseurs dans les champs). Puis est venue la mévente et l'effondrement des cours. Et enfin la sharka, un virus (échappé d'un laboratoire soupçonne-t-on) non mortel pour les arbres mais qui déforme feuilles et fruits, rendant ces derniers invendables. Des inspections sanitaires fréquentes marquent d'orange fluo les arbres contaminés, que les agriculteurs doivent détruire très rapidement, car aucun traitement n'a été trouvé contre la sharka. Il s'ensuit que beaucoup d'agriculteurs soit changent de culture (le foin pour le bétail remplace les vergers, ce qui n'est pas la meilleure chose) soit abandonnent les propriétés. Dans ce dernier cas, les pêchers non traités meurent en deux ans.
D'autres agriculteurs, trop rares peut-être, ont replanté des variétés INRA, pêches ou nectarines, issues de souches plus anciennes et plus résistantes. Moins productives, ces variétés demandent moins d'entretien et produisent des pêches moins bien calibrées mais de bien meilleur goût, rendant globalement la pêche du Roussillon plus attractive qu'il y a seulement dix ans. Les pesticides, ce n'est pas automatique. On ne sait pas encore s'il s'agit d'un combat d'arrière garde ou d'une alternative.
Fin de digression.