ESD 2015 –05 : Calcul de grandeurs

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

On dispose d'une feuille de papier de format A4 qui a donc pour dimensions 21cm $\times$29,7cm. À partir de cette feuille on veut fabriquer une boîte ayant une forme cylindrique.
Pour cela, on peut enrouler la feuille bord à bord de deux manières différentes et obtenir deux boîtes différentes :
L'une dont la hauteur est 21 cm.
L'autre dont la hauteur est 29,7 cm.

1. Laquelle de ces deux boîtes a le plus grand volume ?

2. Plus généralement, quelle méthode donne le plus grand volume si on part d'une feuille de papier de largeur x cm et de longueur y cm avec $x < y$?

B. Les réponses proposées par deux élèves de seconde

Elève 1
Étant donné que j'utilise la même feuille, les volumes seront identiques.
Le volume sera exactement de 21×29,7 = 623.

Élève 2
Je construis les cylindres avec une feuille de papier. Je mesure à chaque fois le diamètre au millimètre près. Je trouve 9 cm pour la première méthode et 6,5 cm pour la deuxième. En prenant $\pi = 3{,}14$ *, j'obtiens un volume de 1335cm3 pour la première méthode et 985cm3 pour la deuxième. La première méthode donne donc le meilleur résultat*

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions des élèves en mettant en évidence leurs compétences dans le domaine *grandeurs et mesures*.

2. Présentez une correction de la question 2 de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3. Proposez deux ou trois exercices sur le thème *grandeurs et mesures* dont l'un au moins favorise la prise d'initiative. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

2. Eléments de correction

Bien que placé dans le thème « grandeurs et mesures », cet exercice dépasse largement le simple thème d'un calcul de volumes, qui n'est qu'un préalable. Il s'agit en outre de :

- Etre capable de construire un raisonnement permettant une prise de décision (trouver un moyen pour comparer les volumes des deux cylindres et décider quel est celui de plus grand volume).
- Etre capable de généraliser (passer de l'exemple numérique concret de la première question à un usage d'expressions algébriques dans la deuxième).

À ce titre, cet exercice est un authentique problème de recherche, polyvalent, pouvant susciter l'attention et l'intérêt des élèves, pour peu que ceux-ci soient réceptifs et motivés.
La première question, pragmatique, propose un exemple numérique destiné à jouer auprès des élèves un rôle d'appropriation et de mise en condition pour la généralisation de la deuxième question.
Les productions des deux élèves montrent que cet objectif peut être atteint (élève 2) ou non (élève 1). Il est impératif de traiter cet exercice en deux temps, avec un bilan à l'issue de la question 1 permettant de relancer ceux des élèves qui, comme l'élève 1, n'ont pas une compréhension correcte de la situation étudiée.

1.
Elève 2 (commençons par lui) :
Cet élève s'engage dans une démarche expérimentale, en fabriquant lui-même les deux cylindres. Il va donc raisonner sur deux objets concrets qu'il peut manipuler.
Les deux diamètres « mesurés au millimètre près » sont quelque peu sous-estimés, puisqu'il trouve 6,5 cm et 9 cm respectivement alors que le calcul direct aurait donné 6,7 et 9,5 à 10^{-1} près. Cet écart peut s'expliquer par un inévitable chevauchement des bords de la feuille pour le collage lors de la fabrication.
Cet élève calcule ensuite correctement les volumes des deux objets, en arrondissant ses résultats au cm^3 le plus proche.
La mention « mesuré au millimètre près » *gj 2015* a certainement un sens dans la production de cet élève, et semble être là pour justifier sa prise de décision : selon lui, l'écart entre les volumes des deux cylindres tels qu'il les a calculés est de toute évidence bien supérieur aux éventuelles erreurs dues à une mesure imprécise des diamètres (il faudrait lui poser la question pour s'assurer de cette interprétation).

Sa démarche est aboutie, pertinente et intéressante. Sa production témoigne de capacités de recherche (engagement dans une expérimentation) et de raisonnement (argumentation correcte et structurée).

On pourrait améliorer sa production en convenant que le premier cylindre a un diamètre plus petit que 7 cm, donc un volume plus petit que 1143 cm^3, alors que l'autre a un diamètre un peu plus grand que 9 cm, donc un volume plus grand que 1335 cm^3, *a fortiori* plus grand que le volume du premier cylindre. Cette démarche permettrait ainsi de *séparer* les deux volumes (on a trouvé un réel *a* tel que $V_1 < a < V_2$).

Elève 1 :
Cet élève s'en tient à une vision intuitive. Implicitement, il semble transférer des propriétés d'aire aux volumes et appliquer un théorème en acte qui pourrait s'énoncer ainsi : « Si on permute certaines des dimensions d'un objet, alors les grandeurs *gj 2015* qui lui sont associées (aire, volume) ne changent pas ». Il confond d'ailleurs aire et volume.
Cette vision le dispense de tout engagement dans une analyse mathématique du problème.

Pour aider cet élève à s'engager dans une démarche :
En premier lieu lui demander dans quelle unité il exprime un volume, et lui faire remarquer qu'un produit de deux longueurs tel qu'il l'a calculé (« exactement » selon lui, alors qu'il a donné la troncature du résultat exact 623,7) va difficilement pouvoir s'exprimer en cm^3…
En deuxième lieu, le faire travailler sur les deux objets concrets de l'élève 2, faire expliciter ce qu'il a réellement calculé (les deux cylindres ont la même aire latérale ; on est amené à poser la question : deux cylindres ayant la même aire latérale peuvent-ils avoir des volumes différents ?) puis revenir sur l'expression du volume d'un cylindre.

On peut faire remarquer au passage (à tous les élèves) le caractère asymétrique de cette expression : on y multiplie la hauteur par *le carré* du rayon (ou du diamètre).
Peut être l'élève 1 constatera-t-il ainsi que deux patrons issus de deux feuilles de papier identiques donnent bien deux cylindres de même aire latérale mais de volumes différents.

À moins de faire preuve d'une forte dose de tartufferie, il est difficile de mettre en évidence des « compétences[1] *dans le domaine grandeurs et mesures » ni même de relever dans cette production la moindre « compétence » vérifiable dans quelque domaine que ce soit.*

- *Ou bien le candidat se sent obligé de fournir un tel commentaire, et de se plier au lénifiant discours officiel en vigueur de nos jours. Je l'invite à utiliser dans ce cas sa plus belle langue de bois.*
- *Ou bien le candidat prend le risque de dénoncer l'hypocrisie du travail qu'on lui demande. Je ne saurais l'y inciter, bien que je sois persuadé que la très grande majorité des jurys du CAPES apprécieraient à ce sujet un certain franc-parler.*

Je m'interroge d'ailleurs sur le choix d'une telle production par les auteurs de ce sujet. Quand on prétend faire disserter sur des lanternes, on ne fournit pas des vessies …

2. On suppose corrigée la question 1. En synthèse de cette question, on a donc noté que deux cylindres pouvaient avoir la même aire latérale mais des volumes différents. On a noté aussi que dans le cas d'une feuille A4 le cylindre de plus grand volume est celui de plus petite hauteur. La question 2 cherche à généraliser la conclusion de la question 1.

On s'appuie sur la production de l'élève 2. Développer une correction autour des points suivants :

1. On insiste sur le fait qu'il n'est pas possible de construire les deux cylindres pour toutes les feuilles de papier. La démarche de l'élève 2 fonctionne très bien avec une feuille de papier donnée, que l'on peut manipuler, mais n'est pas généralisable. Il faut impérativement changer de stratégie.

2. Est-il possible de non pas *mesurer* les diamètres, mais les *calculer* à partir des dimensions de la feuille de papier ?

3. Une fois exprimés les diamètres (ou les rayons), l'élève 2, qui connaît la formule à appliquer, va pouvoir indiquer comment exprimer les volumes. Si l'on considère une feuille de papier de largeur x et de longueur y exprimées en centimètres, on obtient un cylindre de diamètre $\frac{x}{\pi}$, de hauteur y et de volume : $V_1 = \frac{1}{4\pi} x^2 y$ ou bien un cylindre de diamètre $\frac{y}{\pi}$, de hauteur x et de volume : $V_2 = \frac{1}{4\pi} y^2 x$ [2].

4. Comment comparer ces deux nombres ?

- On peut factoriser : $V_1 = \left(\frac{1}{4\pi} x\, y\right) \times x$ tandis que : $V_2 = \left(\frac{1}{4\pi} x\, y\right) \times y$. V_1 et V_2 sont donc rangés dans le même ordre que x et y. Si on suppose que $x < y$, alors $V_1 < V_2$

[1] Précisément, les compétences éventuelles de cet élève pourraient se manifester dans son attitude *après une remise en question de sa production*. Est-il conscient de son erreur ? Remet-il en cause sa « foi de charbonnier » ? Est-il disponible pour s'orienter vers une nouvelle démarche ? Si oui, laquelle ? Seul, son professeur est bien placé pour observer sur une durée suffisante son comportement. En ce qui nous concerne, toute hypothèse est invérifiable.

[2] Certes, ces expressions barbares des volumes sont susceptibles d'épouvanter certains élèves … Le type de travail que le professeur de cette classe a choisi est justement fait, entre autres objectifs, pour donner du sens à des expressions algébriques. On soulignera alors les rôles joués par x et par y dans ces expressions.

- Pour comparer deux nombres, on peut aussi étudier le signe de leur différence, ou bien, quand ils sont strictement positifs, chercher à savoir si leur quotient est plus grand ou plus petit que 1. Le calcul du quotient semble un peu plus pratique : $\frac{V_1}{V_2}{}_{gilbertjulia2015} = \frac{x}{y}$. Si on suppose que $x < y$, alors $\frac{V_1}{V_2} < 1$

Le cylindre de plus grand volume est celui qui a la plus petite hauteur.