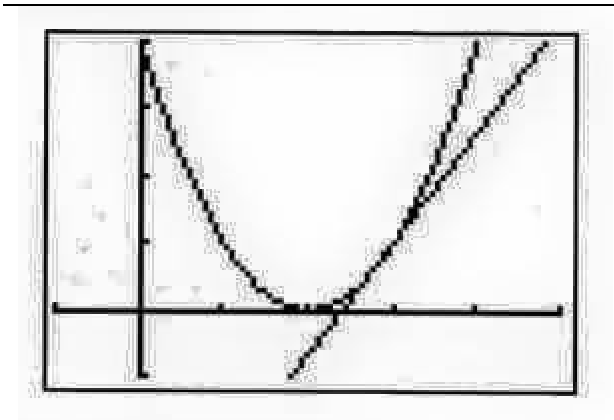
ESD 2015 –04 : Problèmes avec prise d'initiative

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

À l'aide d'une calculatrice, on a obtenu la droite d'équation $y=\frac{5}{3}x-4$ et la courbe représentant la fonction *f* définie par : $f(x)=x^2-4x+4$. La droite semble tangente à la courbe. Est-ce bien le cas ?



B. Les réponses proposées par deux élèves

Élève 1

J'ai résolu l'équation $x^2-4x+4=\frac{5}{3}x-4$, j'ai trouvé deux solutions, et après je ne sais pas comment faire.

Élève 2

Le coefficient directeur de la tangente, c'est $\frac{5}{3}$, alors où c'est tangent on doit avoir $f'(x)=\frac{5}{3}$.
Je dérive f et je résous l'équation $f'(x)=\frac{5}{3}$. J'ai trouvé $\frac{17}{6}$, je fais comment après ?

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions des élèves en mettant en évidence leurs compétences en matière de prise d'initiative et en précisant les conseils à leur apporter pour qu'ils surmontent leurs difficultés.

2. Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe en vous appuyant sur l'une des productions d'élèves.

3. Proposez deux exercices sur le thème *problèmes avec prise d'initiative* dont l'un au niveau collège. Vous prendrez soin de motiver vos choix.

2. Eléments de correction

Voici un exercice qui pourrait aussi bien se ranger dans le thème « conjecture et démonstration ». Son objectif est de faire la distinction entre « ce que l'on voit » et « ce que l'on prouve ». Du fait qu'il s'agit d'un problème ouvert, dans lequel aucune piste n'est indiquée pour valider ou invalider la conjecture proposée, le voici rangé dans le thème « prise d'initiative »

L'exercice donne au professeur l'occasion de faire réfléchir les élèves sur le statut d'une représentation graphique obtenue sur un écran de calculatrice (voir REDCM pages 142 à 144). On remarque que le professeur a choisi délibérément une calculatrice graphique bas de gamme et une fenêtre d'affichage assez large de façon que quelques uns des éléments des suites de rectangles du plan activés par la calculatrice pour représenter la droite et la courbe soient identiques.

On note une question de jury passablement provocatrice, évoquant des prises d'initiative, alors même que, après une première action, les deux élèves jettent l'éponge en se demandant l'un et l'autre « comment faire après ».

1. *Elève 1 :*
Cet élève recherche l'abscisse des points d'intersection de la droite et de la parabole. Sa production prouve que sa démarche ne va pas au-delà, c'est-à-dire qu'il ne recherche pas ces points dans le but de les utiliser ensuite pour répondre à la question, puisque il reconnaît « après je ne sais pas comment faire ».

On peut supposer que cet élève sait résoudre une équation au second degré (savoir faire) bien qu'on ne dispose pas de ses résultats numériques.

Pour aider cet élève à surmonter ses difficultés, on pourrait lui proposer de rechercher une équation de la tangente à la courbe en chacun des deux points d'intersection qu'il a obtenus. Il pourrait vérifier si l'une ou l'autre des deux tangentes est bien la droite de l'exercice.

Elève 2 :
Cet élève recherche quels sont les points de la courbe en lesquels la tangente a pour coefficient directeur $\frac{5}{3}$ *gjulia*2015 . Il obtient un résultat correct, prouvant qu'il maîtrise ce savoir faire.
Il adopte ainsi un type de raisonnement déductif (« si la droite est tangente à la courbe alors c'est nécessairement en un point où le nombre dérivé est $\frac{5}{3}$, je vais donc rechercher de tels points »). Son raisonnement est inabouti, faute d'une étude réciproque.

Pour aider cet élève à surmonter ses difficultés, on pourrait lui suggérer de s'engager dans une démarche réciproque, en formulant ce qu'il a obtenu et ce qui reste à obtenir : « Je suis d'accord avec toi, l'unique point où la droite peut être tangente à la courbe c'est en son point d'abscisse $\frac{17}{6}$. Pourrais-tu préciser l'ordonnée de ce point ? Comment pourrais-tu savoir si, effectivement, la droite est bien la tangente en ce point-là ? ». L'élève aurait le choix entre vérifier si la droite passe ou non par ce point ou bien rechercher une équation de la tangente en ce point.

« *Compétences en matière de prise d'initiative* »
Une distinction est à faire entre les deux élèves.
L'élève 1 se conforme apparemment à un contrat didactique usuel qui pourrait se résumer ainsi : « Dans un exercice, quand on a affaire à deux courbes, on cherche toujours leurs points d'intersection ». On ne peut donc pas parler en ce qui le concerne de « compétence en matière de prise d'initiative » puisqu'il calque sa démarche sur « ce qu'on fait d'habitude » indépendamment du contexte et sans chercher à aller plus loin.

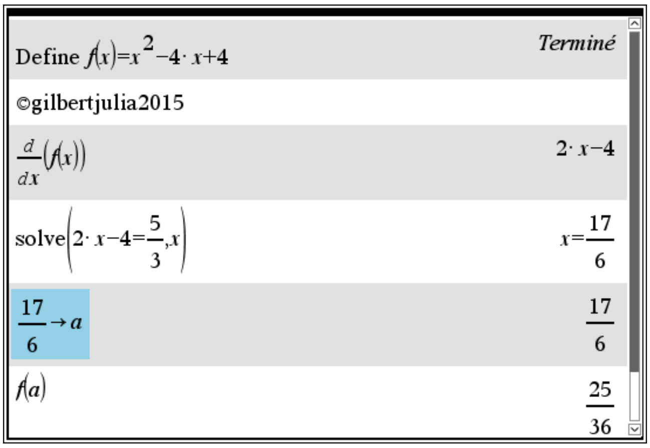
Pour parler de « compétence », il faudrait au minimum supposer que l'élève a pensé ceci : « Si la droite est tangente à la courbe, alors cela ne peut être qu'en un point commun à la droite et à la courbe, je vais donc chercher leurs points d'intersection ». Si tel était le cas, ce serait effectivement une « prise d'initiative » avérée et pertinente. Cette hypothèse est fort peu plausible, et le document ne nous donne pas l'ombre d'un indice permettant de conjecturer qu'il en est bien ainsi.

De toute manière, de solides talents de joueur de fifre sont indispensables pour relever des « compétences » en quelque domaine que ce soit à partir de deux misérables lignes de texte …

En revanche, l'élève 2 a su adapter sa démarche à la question posée, et construire un raisonnement déductif pertinent, comme cela a été développé ci-dessus. En cela, on peut parler d'une prise d'initiative à bon escient.

2. Conformément aux programmes, la tangente à la courbe représentative d'une fonction dérivable f en son point M d'abscisse x_0 est la droite représentant la meilleure approximation affine de f au voisinage de x_0. Il s'agit de la droite passant par M et de coefficient directeur $f'(x_0)$. Pour cette raison, c'est la production de l'élève 2 qui paraît être le meilleur point d'appui pour une correction.

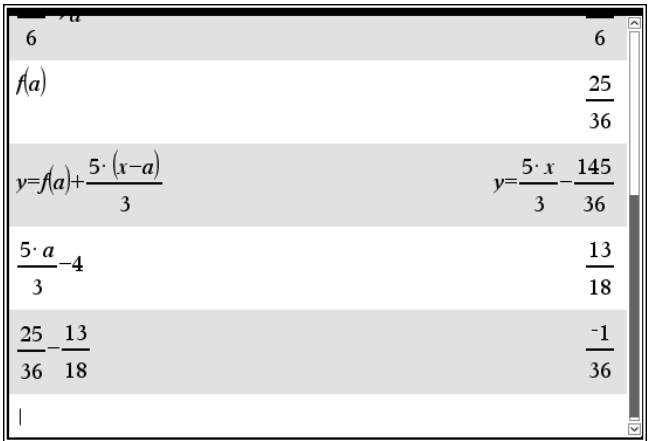
L'élève 2 a effectué correctement une étude directe. Il n'y a rien à y changer. Il y a seulement à expliquer (ou à faire expliquer par l'élève lui-même) aux autres élèves pourquoi il « il dérive f et résout l'équation $f'(x)=\frac{5}{3}$ »



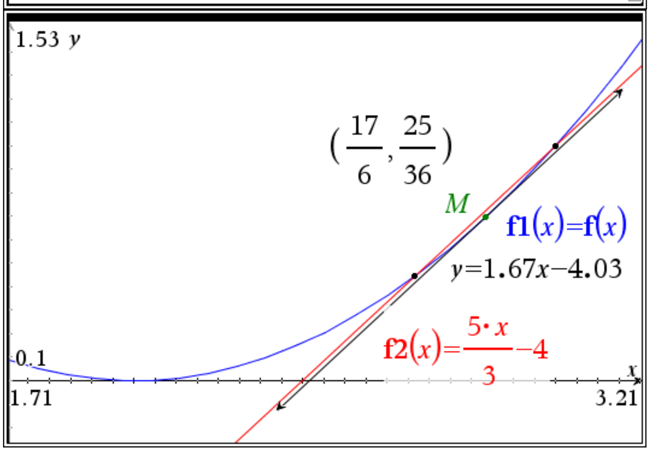
On peut faire remarquer que la fonction dérivée de f est une fonction affine et qu'à ce titre, elle va prendre une fois et une seule toute valeur réelle. Il existe donc bien un point et un seul de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur $\frac{5}{3}$. Il s'agit du point $M\left(\frac{17}{6}\ ;\ \frac{25}{36}\right)_{gjulia2015}$. Si la droite est tangente à la courbe, alors elle est nécessairement la tangente en ce point M.

Plusieurs options différentes permettent de vérifier si la droite proposée est ou n'est pas la tangente à la courbe en ce point M.

Par exemple, le point d'abscisse $\frac{17}{6}$ de la droite a pour ordonnée $\frac{13}{18}$, ordonnée plus grande que celle du point M. Le point M est au dessous de la droite.



Une représentation graphique plus fine que celle de l'énoncé fait apparaître que la droite donnée dans l'énoncé est bien située au dessus de la tangente en M. Pour des raisons de concavité, cette droite est sécante à la parabole.



Facultativement, on peut revenir brièvement sur ce qu'a fait l'élève 1 et comparer les intersections avec la courbe d'une part de la tangente en M et d'autre part de la droite de l'exercice.

$\text{solve}\left(f(x)=\frac{5\cdot x}{3}-4,x\right)$	$x=\frac{8}{3}$ or $x=3$
$\text{solve}\left(f(x)=\frac{5\cdot x}{3}-\frac{145}{36},x\right)$	$x=\frac{17}{6}$
$\text{factor}\left(f(x)-\frac{5\cdot x}{3}+\frac{145}{36}\right)$	$\frac{(6\cdot x-17)^2}{36}$
$\text{factor}\left(f(x)-\frac{5\cdot x}{3}+4\right)$	$\frac{(x-3)\cdot(3\cdot x-8)}{3}$
©gilbertjulia2015	

Dans le cas de la droite de l'exercice, l'équation donnant les abscisses des points d'intersection admet deux racines *simples*.

Dans le cas de la tangente en M, cette équation a une racine *double*. Cette particularité évoque une définition imagée de la tangente en M à la parabole comme étant la position limite d'une sécante lorsque l'autre point d'intersection « tend vers M ».
À la limite, les deux points d'intersection « se confondent », ce point d'intersection est (au moins) un point double.

Eviter absolument de dire « qu'il n'y a qu'un point d'intersection » entre la parabole et la tangente ce qui donnerait une fausse idée de la notion de tangente à une courbe. Rien n'empêche une tangente d'avoir des points d'intersection avec une courbe autres que le point de contact.