ESD 2015 –02 : Probabilités

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Le centre d'approvisionnement d'une chaîne de magasins spécialisés dans le jardinage et l'animalerie vient de recevoir une importante livraison de sable noir et blanc pour la décoration des fonds d'aquarium, de la part d'un nouveau fournisseur.
Ce sable d'une granulométrie importante est déjà conditionné en sacs d'environ 3 litres. À l'issue d'une série de tests, deux types de défauts sont apparus, notés respectivement **C** et **J**.
Le défaut **C** consiste en la présence d'agrégats calcaires.
Le défaut **J** consiste en la présence de « grains » de sable jaune.
On dit qu'un sac est défectueux s'il présente au moins un des deux défauts **C** ou **J**.
On prélève un sac au hasard dans cette livraison. On note C l'événement « le sac présente le défaut **C** » et J l'événement « le sac présente le défaut **J** ».
On suppose que ces deux événements sont indépendants.
Les tests préalables ont permis d'établir que 2% des sacs présentent le défaut **C** et que 3% des sacs présentent le défaut **J**.

1. Donner la valeur des probabilités de chacun des deux événements C et J.
2. On note E l'événement « le sac présente les deux défauts **C** et **J** ». Calculer $P(E)$.
3. Sachant que le sac choisi au hasard est défectueux, calculer la probabilité qu'il présente les deux défauts.

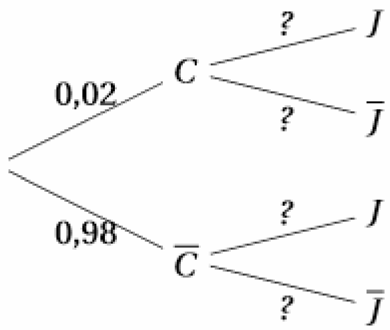
B. Les réponses proposées par deux élèves aux deux premières questions

Élève 1

1. $P(C) = 0{,}02$ *et* $P(J) = 0{,}03$
2. $P(E) = P(C \cap J) = 0{,}02 \times 0{,}03 = 0{,}0006$

Élève 2

1. $P(C) = 0{,}02$ *et* $P(J) = 0{,}03$
2. On dresse un arbre pondéré.
Il me manque des valeurs.
Je ne sais pas comment calculer $P(E) = P(C \cap J)$.



C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs.

2. Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale S.

3. Proposez trois exercices sur le thème *probabilités*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

2. Eléments de correction

Selon une publicité sur les sables d'aquarium, il existe bel et bien du sable blanc et noir, particulièrement adapté paraît-il « aux poissons-chats cuirassés et aux corydoras » Bigre ! Voici une information pourtant capitale qui est passée sous silence dans le texte de cet exercice …

Nous sommes en effet en présence d'un type d'exercice caractéristique où tout est fait dans le texte du sujet pour, justement, « noyer le poisson » si j'ose m'exprimer ainsi. Ce type d'exercice se distingue par les aspects suivants :

- La mise en scène se pare d'une technicité au moins surabondante sinon superflue.
- Il n'y a pas malgré cela de souci de vraisemblance. Les hypothèses émises pour introduire le travail mathématique sont souvent surréalistes.
- Les questions posées sont basiques et parfois désarmantes.

Nous retrouvons ces trois aspects réunis ici :

- Il est question par exemple d'une « granulométrie importante » sans qu'on sache vraiment ce que cela signifie.
- D'une part l'indépendance des deux évènements C et J est sujette à caution (à ma connaissance le calcaire est jaune …). D'autre part, pourquoi ce vilain calcaire infeste 2 % des sacs et pas les autres ? Peut être aurait-il été plus plausible de parler de seuils de tolérance concernant la présence de calcaire ou celle de sable jaune dépassés par une petite partie des sacs (?).
- Le texte demande la couleur d'un hippocampe blanc.

De façon générale, ce genre d'exercice, où les informations sont intégrées dans un long texte soutenu, n'est pourtant pas sans intérêt, à condition qu'une certaine vraisemblance soit respectée. Un objectif spécifique est précisément d'apprendre aux élèves à extraire puis utiliser l'information utile.

Ici, seule la question 3 de l'exercice, portant sur la notion de probabilité conditionnelle, nécessite de la part des élèves un réel effort de réflexion. Bizarrement, le jury n'a pas jugé opportun de proposer des réponses d'élèves à cette question. On peut le regretter.

Mathématiquement, il est question ici de probabilité d'une intersection sous hypothèse d'indépendance, de probabilité d'une réunion, et de calcul d'une probabilité conditionnelle d'un évènement sachant un autre réalisé.

1. Analyse des travaux d'élèves.

Les deux élèves ont brillamment surmonté les difficultés de la question 1 de l'exercice et trouvé l'un et l'autre la couleur de l'hippocampe blanc.

Ces deux élèves se distinguent l'un de l'autre par leur traitement de la deuxième question :

Elève 1 :
Sa réponse est correcte. Il utilise implicitement l'hypothèse d'indépendance des deux évènements C et J. Cependant, cet élève aurait dû faire explicitement référence à cette hypothèse d'indépendance afin de justifier pourquoi il effectuait le produit des deux probabilités pour obtenir $P(C \cap J)$. Pour cette raison, son travail n'est pas entièrement satisfaisant.

Elève 2 :
Cet élève ne donne pas la réponse. Mais il est conscient de l'origine de ses difficultés et a bien délimité où « le bât blesse » en ce qui le concerne (ce qui est en soi une réussite …)
Il maîtrise bien la notion d'arbre de probabilité à deux niveaux. Il sait qu'au deuxième niveau, les probabilités à reporter sur les branches sont des probabilités conditionnelles. Il s'attend donc à trouver dans le texte de l'énoncé de telles données, comme par exemple : « parmi les sacs présentant le défaut **C**, x % présentent aussi le défaut **J** ».

Pour cette raison, cet élève ne prend pas en compte l'hypothèse d'indépendance de ces deux évènements, hypothèse qu'il n'a pas su utiliser.
Sa méthode correspond probablement au contrat didactique en cours à ce moment dans sa classe (c'est-à-dire à la méthode de résolution habituelle d'une question de probabilité conditionnelle).
Sa production est intéressante car elle va permettre de revenir sur la signification de la notion d'indépendance de deux évènements.

2. Compte tenu du contexte, cet exercice me semble davantage destiné à des sections de bac technologique (comme le bac STAV par exemple) qu'à des terminales scientifiques, quoi qu'en dise le jury.

La question 1 sert uniquement à repérer dans le texte les informations utiles (on peut conseiller aux élèves de surligner ces informations).

Pour corriger la question 2, on relèvera dans le texte la phrase : « On suppose que ces deux événements sont indépendants » et on fera préciser la signification de l'indépendance.

Si l'on s'adresse aux élèves 1 et 2, ils vont probablement répondre l'un comme l'autre, à juste titre : « Deux évènements *A* et *B* sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ».

Cependant, cette définition, faite pour inclure le cas d'un évènement impossible, masque la vraie raison d'être de la notion d'indépendance (et ceci est à l'origine de l'erreur de l'élève 2).
Si *A* et *B* sont de probabilité non nulle, dire que *A* et *B* sont indépendants, c'est dire que la probabilité de l'un d'entre eux n'est pas affectée par toute information concernant l'avènement de l'autre : $P_B(A) = P_{\overline{B}}(A) = P(A)$ et de même $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B) = P(B)$. La probabilité *a posteriori* est la même que la probabilité *a priori*. Et c'est bien cela la propriété qui caractérise l'indépendance de deux évènements distincts de l'évènement impossible et de l'évènement certain.

On pourra dès lors se tourner vers l'élève 2 (et ses disciples) : il ne manque aucune valeur. Les deux évènements *C* et *J* sont supposés indépendants, cela revient à supposer que : $P_C(J) = P(J) = 0{,}03$. On peut donc pondérer les branches du deuxième niveau de l'arbre de probabilité. On constatera que pour répondre à la question, seule une branche est utile, et le calcul de la probabilité de la branche « *C puis J* » revient au calcul effectué par l'élève 1. (Il n'était donc pas indispensable de confectionner un tel arbre).

Reste la question 3. Faire identifier son objectif : Il s'agit maintenant de calculer la probabilité conditionnelle $P_{C \cup J}(C \cap J)$, c'est-à-dire de calculer le quotient $\dfrac{P(C \cap J)}{P(C \cup J)}$.
Nous connaissons $P(C \cap J)$, il faut calculer $P(C \cup J)$.
Deux options sont possibles pour cela :

- Utiliser la formule d'addition : $P(C \cup J) = P(C) + P(J) - P(C \cap J)$ (option la plus judicieuse et qui permet de souligner comment calculer la probabilité d'une réunion sous hypothèse d'indépendance)
- Exploiter l'arbre de probabilité de l'élève 2 : $P(C \cup J) = P(C) + P(\overline{C}) \times P_{\overline{C}}(J)$

Finalement : $P_{C \cup J}(C \cap J) = \dfrac{0{,}0006}{0{,}0494} = 0{,}012$ à 10^{-3} près.

On fera remarquer que la probabilité *a posteriori* est quasiment égale au double de la probabilité *a priori* (c'est normal, on peut pronostiquer que le constat des deux défauts est de probabilité plus élevée si on a sélectionné les sacs qui en ont déjà un plutôt que si on considère l'ensemble de tous les sacs) et on vérifiera auprès des élèves qu'il n'y a pas eu d'utilisation de théorème en acte (comme par exemple la réponse 0,025 demi somme des probabilités)

3. Voir REDCM pages 190 à 202.

3. Commentaire

Cet exercice est représentatif d'une tendance lourde : on habille la notion mathématique que l'on veut présenter sans trop s'occuper de la vraisemblance de l'habillage.

Pour ma part, je suis toujours gêné par ce genre de texte pseudo-concret où l'on se gargarise de mots inutilement techniques (« granulométrie » est particulièrement savoureux …) et où, dans le même temps, on émet des hypothèses mathématiques invérifiables, à la « va-comme-je-te-pousse ». On comprend ici assez vite que dans l'aquarium y aura beaucoup d'eau de boudin.

4. Le barboufat, quintessence de l'eau de boudin

L'occasion m'est donnée ici de réhabiliter l'eau de boudin, je la saisis au vol.

Dans mon village, jusqu'au début des années soixante, de nombreuses familles engraissaient un cochon puis procédaient à sa « matança », en général au mois de janvier. Le premier jour était consacré entre autres tâches au sacrifice de la bête et au découpage des morceaux. Une fois mis de côté les jambons, épaules, échine, côtelettes, … les autres morceaux, destinés le lendemain à la fabrication des boudins (la tête en particulier), étaient longuement cuits au feu de bois dans un grand chaudron de cuivre rempli d'eau bouillante. La « botifarraïre » du village était la seule personne habilitée à décider d'un bon degré de cuisson. Une fois retirés les morceaux de cochon cuits à point, il restait dans le chaudron un bouillon gras, coloré, très fortement odorant et aussi fort en goût, où de petits morceaux de chair restaient en suspension.

C'était ça le « barfoufat[1] » (le « t » final se prononce distinctement, comme dans Brad Pitt).

Une fois celui-ci dégraissé, on en faisait des soupes avec des vermicelles, des macaronis ou de l'orge perlé. Chaque famille ayant un plein chaudron de barboufat, on en échangeait des litres (il y avait un seul égorgeur de cochons patenté, les « matançes » s'échelonnaient de fin décembre à début février) entre parents ou voisins ; ce bouillon durait dans tout le village une bonne partie de l'hiver.

De nos jours évidemment, l'eau de boudin n'a plus la même saveur mais l'existence, rue de Grenelle, d'un chaudron de cuivre en contenant peut difficilement être mise en doute. Les programmes de mathématiques du Collège 2016 viennent d'en être retirés. Il y a fort à parier que, tapis dans les abysses de ce chaudron, glougloutent des projets de programmes de mathématiques du Lycée.

[1] Selon l'appellation roussillonnaise usuelle ; « *brou bufat* » en catalan normatif.