ESD 2014 –17 : Application des mathématiques à d'autres disciplines

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Lorsque la vitesse de coupe d'une scie sauteuse dépasse 1,5 m.s^{-1}, la découpe d'un plastique dur, tel que le plexiglas, devient impossible, car il y a un échauffement trop important du matériau, et donc un risque de fonte de celui-ci. Le but de l'exercice est de déterminer la fréquence de rotation F d'un point A de la manivelle, élément de la scie sauteuse qui permet de régler la vitesse de coupe, afin que la vitesse maximale de coupe n'excède pas 1,5 m.s^{-1}.

1. La fréquence de rotation de la manivelle est commandée par une molette de réglage (voir figures au verso). La modélisation mathématique de ce problème conduit à étudier le mouvement du point H, projeté orthogonal du point A sur l'axe des ordonnées. Celui-ci est décrit par la fonction g définie par :
$y_H = g(t) = 12\sin(2\pi Ft)$ où y_H est exprimée en mm, F en tours.s^{-1} et t en secondes.

Fréquence de rotation en fonction de la molette de réglage.

Position de la molette	Fréquence de rotation (tours.min^{-1})
1	500
2	1000
3	1400
4	2000
5	2500
6	3100

1. Exprimer la vitesse instantanée du point H en fonction de t et de la fréquence de rotation F.
2. Déterminer la vitesse maximale du point H
3. Déterminer la fréquence de rotation F du point A de sorte que la vitesse du point H qui correspond à la vitesse de coupe n'excède pas 1,5 m.s^{-1}.
4. Préciser la position choisie pour la molette de réglage.

D'après document ressources interdisciplinaires pour la classe de première STI2D

B. Extraits du document ressources interdisciplinaires pour la classe de première STI2D

L'objectif premier de la parution de ce document ressource pour la classe de première STI2D est de proposer aux enseignants de mathématiques quelques situations d'appui pour la mise en œuvre du nouveau programme de mathématiques, conformes à l'esprit dans lequel il a été conçu. [...] *ce nouveau programme insiste auprès des enseignants de mathématiques sur la nécessité de :*

– *prendre appui sur les situations expérimentales rencontrées dans les enseignements scientifiques et technologiques de la série,*
– *prendre en compte les besoins mathématiques des autres disciplines.*

[...] ***Etude d'une scie sauteuse, objectifs de l'exercice.***

Mathématiques	*Physique-chimie*	*Enseignement technologique commun*
Fonctions trigonométrique *Fonction dérivée* *Dérivée de sin(wt)*	*Thème : transport* *Sous-thème : Mise en mouvement* *Notions et contenus :* *Référentiels, trajectoires, vitesse, vitesse angulaire, accélération*	*Comportement énergétique des systèmes (transformation de l'énergie)* *Typologie de solutions constructives des liaisons entre solides*

C. Le travail à exposer devant le jury

1. En vous appuyant sur le document ressources, précisez l'intérêt d'un enseignement mathématique dans lequel l'étude de situations contextualisées revêt un rôle important.

2. Exposez une correction de l'exercice telle que vous la présenteriez devant une classe.

3. Proposez deux ou trois exercices prenant en compte l'utilisation des mathématiques dans d'autres disciplines. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

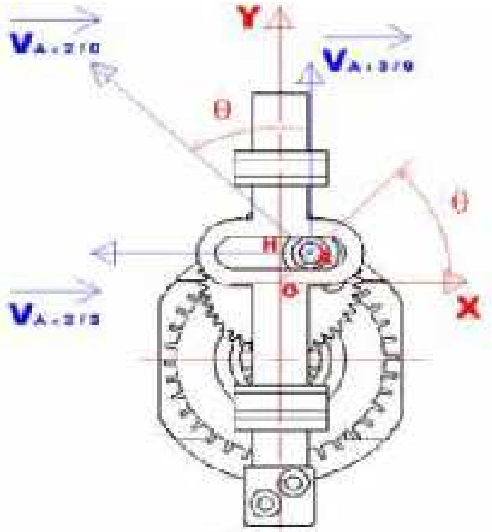


Figure 1

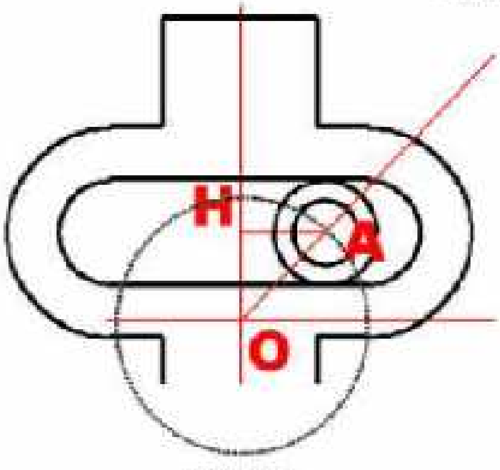


Figure 2

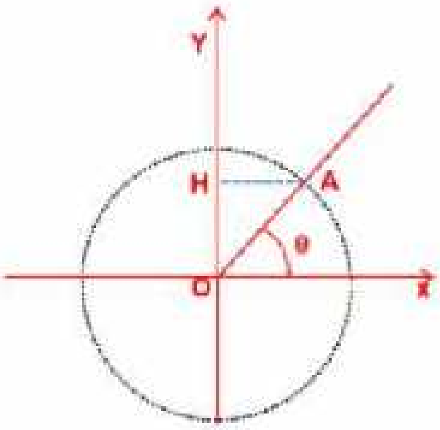


Figure 3

2. Eléments de correction

Voici un sujet fortement « contextualisé ». Destiné à une classe de première technologique, l'exercice prend appui sur l'étude du mouvement de la lame d'une scie sauteuse.

Alors que le sujet abordé est parfaitement clair : « étude d'une scie sauteuse », on demeure médusé par le jargon abscons décrivant les « objectifs de l'exercice ». Certes, fort heureusement pour nous, les objectifs mathématiques sont à peu près ciblés mais quant à la signification précise en langue française intelligible d'une « typologie de solutions constructives des liaisons entre solides », on repassera plus tard ...

Le sujet permet en réalité de travailler les notions de tr*ansmission* et de *transformation* de mouvement. L'engrenage des deux roues dentées figurant sur les schémas transmet le mouvement sans en changer la nature tandis que l'assemblage de type « manivelle + bielle » auquel on a affaire ici transforme le mouvement rotatif de *A* en le mouvement rectiligne de *H*. L'objectif majeur semble bien là : comment cette transformation d'un mouvement circulaire en mouvement rectiligne s'opère-t-elle, peut-on la modéliser mathématiquement ?

De façon accessoire, la situation permet de retravailler la notion d'unités, et de leur uniformisation. Il est nécessaire en effet de bien repérer dans quelles unités sont exprimées les données et de les uniformiser avant d'exécuter les calculs.

1. Trois intérêts importants d'une contextualisation :
- Promouvoir l'efficacité d'une modélisation mathématique
- Promouvoir la notion de démarche d'investigation
- Donner du sens à une notion mathématique.

2. Correction de l'exercice.

Il semble utile, avant de se lancer dans une correction, de commenter un petit peu d'une part le schéma et d'autre part les données de l'énoncé. (L'enseignant de la classe concernée pourrait faire appel à son collègue de technologie et lui demander de lui fournir une scie sauteuse en partie disséquée pour que le mouvement de va-et-vient de la lame soit apparent).

Le schéma, de type « schéma IKEA » (on ne comprend pas tout …), mérite d'être quelque peu interprété et épuré.

- Nous y voyons d'abord deux roues dentées formant un engrenage. La plus grande des roues transmet, sans changer la nature du mouvement, son mouvement de rotation à la plus petite des roues, celle qui détermine le mouvement du point *A*. Ce mouvement peut être rendu plus explicite sur la figure 3. On peut définir la fonction : $t \mapsto \theta(t) = 2\pi Ft$ qui désigne, en fonction de *t*, une mesure en radians de l'angle $\left(Ox, \overrightarrow{OA}\right)$ à l'instant *t*
- Nous y voyons ensuite un assemblage permettant de transformer le mouvement de rotation de *A* en un mouvement rectiligne, celui de *H*. C'est cet assemblage qui nous intéresse. On peut expliciter les coordonnées de *A* en fonction de *t* dans le repère de la figure 3 et en déduire celles de *H*, projection orthogonale de *A* sur l'axe des ordonnées : $\begin{cases} x_A(t) = R\cos\theta(t) \\ y_H(t) = y_A(t) = R\sin\theta(t) \end{cases}$ où $R = OA$.

  Ceci nous permet d'expliquer d'où provient la fonction *g* de l'énoncé : $g(t) = R\sin\theta(t)$. Il s'agit d'une fonction trigonométrique. On note que si on se réfère à l'énoncé $R = OA = 12$ (en mm).
- On retient que : $\begin{cases} x_A(t) = 12\cos(2\pi Ft) \\ y_H(t) = y_A(t) = 12\sin(2\pi Ft) \end{cases}$

La correction proprement dite commence alors avec l'étude de la figure 1. Le vecteur vitesse du point *A* y est matérialisé. Il s'agit d'un vecteur orthogonal au vecteur $\overrightarrow{OA}$. Il est décomposé en somme de deux vecteurs dont une composante, celle relative à la direction de l'axe des ordonnées, représente le vecteur vitesse du point H (la désignation commune $\overrightarrow{V_A}$ avec diverses indexations est probablement une convention technologique ; en mathématiques, elle n'est pas satisfaisante).

Les coordonnées du vecteur vitesse du point A sont les dérivées des fonctions coordonnées $\overrightarrow{V_A(t)}$: $\left(\frac{\mathrm{d}x_A}{\mathrm{d}t}(t)\,;\,\frac{\mathrm{d}y_A}{\mathrm{d}t}(t)=\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(t)\right)$.

La vitesse instantanée de H est l'ordonnée de ce vecteur : $v_H=\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(t)=24\pi F\cos(2\pi Ft)$

La vitesse numérique de H exprimée en mm.s^{-1} est $|v_H|=24\pi F\,|\cos(2\pi Ft)|$.

Elle est maximale lorsque $|\cos(2\pi Ft)|=1$ (c'est-à-dire lorsque H passe en O, dans un sens ou dans l'autre) :

$\max|v_H|=24\pi F$ en mm.s^{-1} donc $\max|v_H|=0{,}024\pi F$ en m.s^{-1}.

On souligne bien que, dans cette expression, F désigne la fréquence de rotation en tours.s^{-1}. Dans l'énoncé la fréquence nous est donnée en tours.min^{-1}.

Une petite étude sur tableur pourrait synthétiser les vitesses maximales atteintes par la lame suivant la position de la molette.

Seules les positions 1 et 2 sont compatibles avec la découpe du plastique.

	A molette	B fréquence	C vitesse	D	E
=			$=\frac{0.024\cdot\pi\cdot b[\,]}{60}$		
1	1.	500.	0.62832		
2	2.	1000.	1.2566		
3	3.	1400.	1.7593		
4	4.	2000.	2.5133		
5	5.	2500.	3.1416		
6	6.	3100.	3.8956		
7					

C vitesse$:=\frac{0.024\cdot\pi\cdot b[\,]}{60}$

3. Conclusion

Voici un thème qui mérite d'être préparé chez soi longtemps à l'avance. Ce n'est certes pas le jour de l'oral que l'on va sortir en grand nombre, comme des lapins d'un chapeau, des applications mathématiques à d'autres disciplines. Il est nécessaire que chaque candidat y réfléchisse et mette sous son coude, lorsque l'occasion se présente à lui, deux ou trois exemples de telles situations significatives où l'apport d'une notion mathématique est pertinente.

- Au collège, les exemples sont pour la plupart disséminés dans les manuels (quelques uns en géométrie), ce qui ajoute à la difficulté de leur repérage.
- Au lycée, certains chapitres spécifiques sont plus propices (applications des fonctions en séries S, ES et surtout technologiques, fonctions logarithmes et exponentielles, équations différentielles, algèbre, …). Mais les exercices qu'ont en extraira seront plus chronophages.

Distinguer contextualisation et habillage.

Ce sujet donne l'occasion de bien faire la différence entre une « situation contextualisée » et une « situation habillée ».

Dans une « situation contextualisée », il est question d'aborder d'emblée une situation issue de la vie courante ou relative à une discipline donnée (économie, physique, technologie, …) en se plaçant dans le cadre même de cette situation (on utilise son propre langage et ses propres codes). On examine en quoi un apport mathématique est pertinent pour appréhender le contexte.

Dans une « situation habillée », l'enseignant considère d'emblée une notion mathématique. Il essaie de construire autour de cette notion une situation dans laquelle cette notion est censée opérer.

- Dans le premier cas, la notion mathématique pertinente a un rôle d'outil, et l'enseignant a pour objectif de mettre en évidence l'intérêt de cet outil dans un contexte « courant » et de faire en sorte que les élèves se l'approprient. C'est bien ce premier cas, et uniquement lui, qui est visé par le thème.
- Dans le deuxième cas, l'habillage, a un rôle de faire valoir. L'enseignant doit veiller au fait que l'habillage choisi pour illustrer une notion donnée soit *plausible*. Ce n'est pas ce qui est attendu dans le thème du jour.

Par exemple, si l'on rapproche ce sujet du sujet ESD2015 « Bubulle fait des probabilités », la différence est éclatante. Autant dans le cas présent on se trouve confronté à un réel problème issu de la technologie, autant dans « Bubulle fait des probabilités » on se trouve plongé dans un pédant univers surréaliste sans aucun souci d'une quelconque vraisemblance. Un sujet est « contextualisé », l'autre est (très mal …) « habillé ».

On peut penser que les jurys de CAPES feront clairement la différence, si le candidat ne la fait pas. Attention donc au contresens.

5. Pour aller plus loin, une résolution

Prêter attention aux permutations circulaires des différentes lettres utilisées (en particulier des lettres e, f, g), permutations qui dispensent d'effectuer trois fois un même calcul.

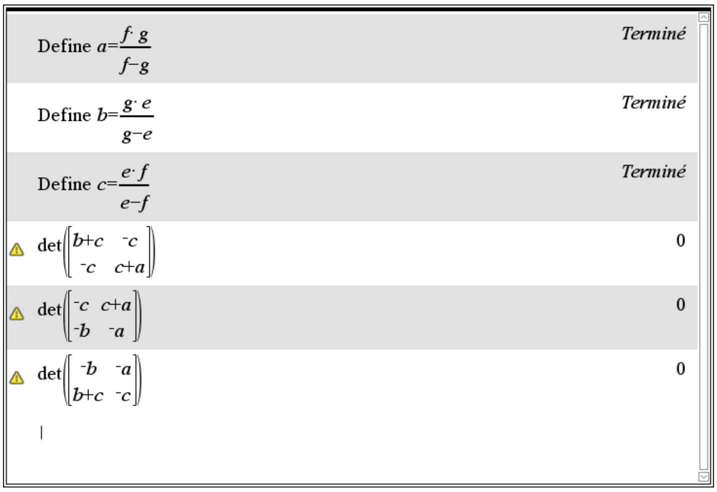
1. Les droites (BC) et (EF) sont coplanaires dans le plan d'équation $z=0$. En général, elles se coupent au point I de (EF) associé à la valeur $u=\dfrac{e}{e-f}$ de son paramètre, c'est à dire au point I de coordonnées $\left(\dfrac{-ef}{e-f};\dfrac{ef}{e-f};0\right)$ gilbertjulia2014 , à moins que $e=f$ auquel cas les droites (BC) et (EF) sont parallèles.

Les droites (CD) et (FG) sont coplanaires dans le plan d'équation $x=0$. En général, elles se coupent au point H de (FG) associé à la valeur $v=\dfrac{f}{f-g}$ de son paramètre, c'est à dire au point H de coordonnées : $\left(0;\dfrac{-fg}{f-g};\dfrac{fg}{f-g}\right)$, à moins que $f=g$ auquel cas ces droites sont parallèles.

Les droites (DB) et (GE) sont coplanaires dans le plan d'équation $y=0$. En général, elles se coupent au point J de (GE) associé à la valeur $w=\dfrac{g}{g-e}$ de son paramètre, c'est à dire au point J de coordonnées : $\left(\dfrac{ge}{g-e};0;-\dfrac{ge}{g-e}\right)$, à moins que $g=e$ auquel cas ces droites sont parallèles.

2. Cas où les trois points *I, H, J* existent.
Les trois réels e, f, g sont deux à deux distincts.
Alors $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{ge}{g-e}+\dfrac{ef}{e-f};-\dfrac{ef}{e-f};-\dfrac{ge}{g-e}\right)$ gilbertjulia2014 tandis que $\overrightarrow{HI}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{ef}{e-f};\dfrac{ef}{e-f}+\dfrac{fg}{f-g};-\dfrac{fg}{f-g}\right)$.

Les trois déterminants extraits de la matrice des coordonnées de ces vecteurs sont nuls, comme en témoigne la capture d'écran ci-contre. Ces deux vecteurs sont colinéaires et les trois points I, H, J sont des points alignés.



Cas où il y a un parallélisme et un seul.
Deux des trois réels e, f, g sont égaux. Par exemple $e=f$ tandis que $f\neq g$: les droites (BC) et (EF) sont parallèles, les autres paires non.

Le point H a pour coordonnées : $\left(0;\frac{-eg}{e-g};\frac{eg}{e-g}\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{HJ}$ pour coordonnées $\left(\frac{ge}{g-e};-\frac{ge}{g-e};0\right)_{gilbertjulia2014}$. Ce vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$. La droite (HJ) est parallèle aux droites (BC) et (EF).

Cas où il y a deux parallélismes.
Alors il y en a trois car $e = f = g$.