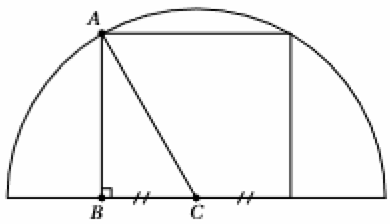
ESD 2014 –10 : Géométrie dans l'espace

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

On dispose d'un coffre cubique mesurant 30cm de côté. On veut le couvrir d'une cloche ayant la forme d'une demi-sphère en la positionnant de sorte que son centre coïncide avec le centre du carré de base du coffre. Quel peut être le rayon minimal de la cloche ?

B. Les solutions de deux élèves de seconde.



Élève 1

On sait que : chaque arête du carré fait 30 cm
la moitié d'une arête fait 15 cm
Pour calculer AC, j'utilise le théorème de Pythagore.

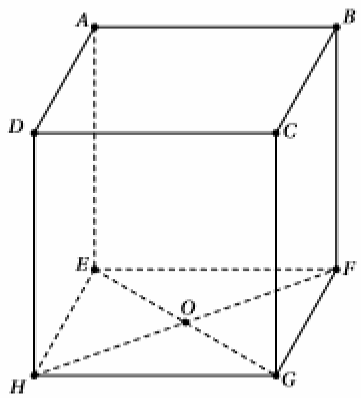
$$AC^2 = 15\,cm^2 + 30\,cm^2$$

$$AC^2 = 225 + 900 = 1\,125$$

$$AC = \sqrt{1\,125} \approx 33{,}5$$

Le rayon de la demi-sphère est égal à 33,5 cm.

Élève 2



Pour calculer le rayon minimal de la demi-sphère, il faut calculer la diagonale reliant deux sommets opposés.
Soit le cube ABCDEFGH représenté ci-contre.
D'après le théorème de Pythagore dans HGF rectangle en G

$$FH^2 = FG^2 + GH^2 = 30^2 + 30^2 = 1\,800$$

$$FH = \sqrt{1\,800} \approx 42{,}4\,cm$$

Ainsi $OF = \dfrac{42{,}4}{2} = 21{,}2$

Le rayon de la cloche est de 21,2 cm.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence ses réussites et en indiquant l'origine de ses éventuelles erreurs.

2. En vous appuyant sur les productions des élèves, corrigez cet exercice comme vous le feriez devant une classe de seconde

3. Présentez deux ou trois exercices de *géométrie dans l'espace*. On s'attachera à mettre en évidence l'intérêt de chacun d'eux pour la formation mathématique des élèves.

2. Eléments de correction

1. L'exercice propose une situation contextualisée se ramenant à des calculs de longueurs dans l'espace. Il s'agit d'un problème ouvert où aucune démarche n'est suggérée.
Cet exercice est tout à fait conforme aux objectifs généraux des programmes de seconde en ce qui concerne la géométrie dans l'espace :
« *Les élèves doivent être capable de représenter en perspective parallèle (dite aussi cavalière) une configuration simple et d'effectuer des constructions sur une telle figure. Ils doivent aussi être capables de mobiliser pour des démonstrations les théorèmes de géométrie plane.* »
En effet, quelle que soit leur démarche, les élèves auront à surmonter trois difficultés :

- Passer de la situation concrète à une modélisation à l'aide d'une figure mentale idéale (cube inscrit dans une demi-sphère (ce qui nécessite d'avoir une bonne vision de l'espace).
- Trouver une représentation plane adéquate de tout ou partie de cette figure (une perspective cavalière par exemple).
- Mobiliser deux fois le théorème de Pythagore pour effectuer des calculs de longueurs.

Le type de représentation de la figure choisi influe sur la vision de la situation.
Elève 1.
Cet élève a voulu représenter le cube et la demi-sphère vus « en coupe ».
Il a représenté la section du cube par un plan parallèle à une face latérale.

- Ou bien ce plan est celui d'une face latérale elle-même (la confusion entre les mots « arête » et « côté » en serait un indice). Dans ce cas, la figure est correcte. Mais alors le centre présumé C de la demi-sphère ne correspond pas aux consignes l'énoncé, ce qui affaiblit cette hypothèse.
- Ou bien (plus probable) ce plan passe par le centre du carré de base (centre qu'il désigne par C). Pour représenter la section plane de la demi-sphère « minimale », il applique le théorème en acte : « *il suffit que la section du cube soit exactement inscrite dans celle de la sphère* »). Dans ce cas, la figure est incorrecte.

Cet élève a de ce fait transformé le problème de géométrie dans l'espace en un problème de géométrie plane, en cherchant un demi-disque dans lequel est inscrit un carré, section plane du cube (problème qu'il a résolu correctement).
On ne peut pas savoir quelle idée cet élève se fait de la figure idéale 3D correspondant au problème.

Elève 2.
Cet élève a choisi une représentation en perspective cavalière.
Il a assimilé le coffre à un cube qu'il construit correctement en nommant ses sommets. Il construit correctement le centre du carré de base, qu'il nomme O.

Il cherche ensuite non pas la demi-sphère contenant le cube, mais la demi-sphère contenant le carré de base. Cette erreur est due à une non compréhension de la situation (il a compris que la demi-sphère devait contenir la base du cube). Il a peut-être été mis en difficulté par la formulation de l'énoncé. La phrase « On veut ... du coffre » est longue et contient beaucoup d'informations, qu'il faut savoir extraire et hiérarchiser. Le terme « rayon minimal » a été mal attribué : selon lui, la demi-sphère devait contenir au minimum la base du cube. Le rayon qu'il obtient, plus petit que l'arête du cube, conforte cette hypothèse.

Les productions de ces deux élèves montrent que cet exercice a probablement été donné à titre de problème de recherche, sans commentaire de la part du professeur (juste l'énoncé, sans explication détaillée de la consigne autre que « la cloche doit contenir le coffre »). Ce choix est délibéré et judicieux, il explique les erreurs de compréhension telles que celle de l'élève 2 . Il appartient aux élèves de se construire eux-mêmes leur propre vision, c'est ici un objectif important.

2. Prévoir une correction en deux temps. Dans un premier temps on aboutit à une figure représentant de façon efficace la situation. Dans un second temps, on effectue les calculs de longueurs.

La figure de l'élève 2 peut constituer un point de départ : on commence par représenter le coffre en perspective cavalière, en l'assimilant à un cube. Il reste à « positionner » la cloche.
La confrontation avec la figure de l'élève 1, dont on fera expliciter la signification, a un intérêt :

- Si sa signification est la section plane par un plan parallèle à une face passant par le centre du carré, on matérialise la section du cube par ce plan sur la perspective cavalière. Mais le demi-disque est-il une section plane de la « bonne » demi-sphère ... ?
- Si sa signification est la section plane par une face du cube, alors le demi-disque représente correctement la section de la demi-sphère par ce plan. Mais le point *C* n'est pas le centre de la demi-sphère (voir plus loin deuxième façon de calculer le rayon).

En même temps, cette confrontation amène à une remarque : le rayon de la sphère recherchée est certes à coup sûr plus grand que l'arête du cube mais aussi certainement plus grand que 33,5 cm.

La recherche peut être relancée à ce moment, en donnant une consigne beaucoup plus précise : « Quels sont les points du cube qui sont aussi sur la demi-sphère minimale ? Citer au moins un segment qui est un rayon de la demi-sphère puis calculer la longueur de ce segment. »

Une fois convenu que les points *A, B, C, D* sont tous équidistants de *O* et qu'ils sont sur la demi-sphère « minimale », il reste à calculer la longueur d'un de ces segments, par exemple *OB* ce qui permettra de réinvestir les calculs de l'élève 2.

Etablir que : $OB^2 = OF^2 + FB^2 {}_{\mathit{gilbertjulia}2014} = \frac{1}{4}\left(FH^2 + GH^2\right) + FB^2 = 1350$ puis que le rayon minimal est $\frac{\sqrt{6}}{2}\times 30$, soit 36,8 cm à 0,1 cm par excès.

On pourra faire remarquer qu'il y a au moins une autre façon de calculer ce rayon. Si par exemple on désigne par *J* le milieu de [*EF*] (point qui correspond au point *C* de la figure de l'élève 1) on peut écrire aussi :
$OB^2 {}_{\mathit{gilbertjulia}2014} = OJ^2 + JB^2$ (en justifiant pourquoi le triangle *OJB* est rectangle en *J*).

En synthèse de l'exercice, on retiendra le figure de l'élève 2, le rayon à calculer, et les deux façons de le calculer.

3. Voir (entre autres) REDCM pages 68 à 74.