ESD 2014 –06 : Optimisation

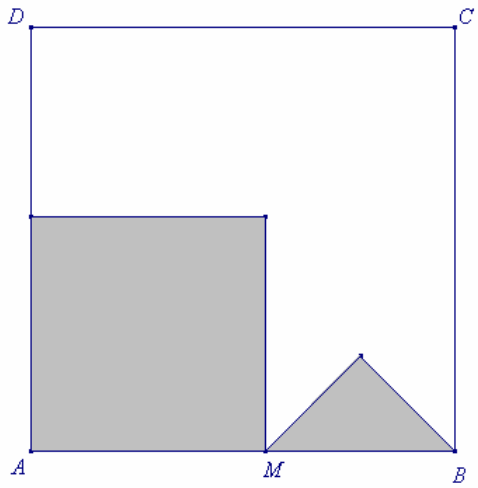
1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Le carré $ABCD$ a un côté de longueur 8 cm. M est un point du segment $[AB]$. On dessine comme ci-contre dans le carré $ABCD$:
– un carré de côté $[AM]$;
– un triangle rectangle isocèle de base $[MB]$.

On s'intéresse au motif constitué par le carré et le triangle.

Est-il possible de faire en sorte que l'aire du motif soit la plus grande possible ? La plus petite possible ?
Si oui dans quels cas ?



B. Extrait du document « ressources pour la classe de seconde. Fonctions ».

Quels sont les objectifs à atteindre ?
Comme dans toutes les parties du programme, les paragraphes qui précèdent les tableaux précisant les contenus et les capacités attendues, fixent de façon nette les objectifs à atteindre et les déclinent en termes de ***nature des problèmes que les élèves doivent savoir résoudre, précisant également le degré d'autonomie attendu****.*
Ces objectifs sont ambitieux, le degré d'autonomie que les élèves doivent montrer pouvant être maximal : autonomie du choix de la démarche, de la nature du traitement à apporter, de la modélisation à mettre en oeuvre.
Construire chez tout élève cette autonomie nécessite une formation adaptée incluant une confrontation fréquente à des problèmes posés sous une forme ouverte*.*
Le programme fixe comme objectif la maîtrise de [...] problèmes d'optimisation ou du type « $f(x)>k$ ».
Dans un premier temps un élève doit pouvoir résoudre un tel problème, de façon exacte ou approchée, à l'aide d'un graphique et de façon exacte si les variations de la fonction et les antécédents de k sont connus.
Dans un second temps cette étude peut être faite, selon les cas, en exploitant les potentialités de logiciels, graphiquement ou algébriquement, toute autonomie pouvant être laissée pour associer au problème une fonction.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Précisez en quoi l'exercice proposé répond aux objectifs mentionnés dans le document ressources et proposez différentes démarches possibles d'élèves.

2. Exposez deux corrections de cet exercice, l'une telle que vous le feriez devant une classe de troisième, l'autre devant une classe de première.

3. Présentez deux exercices d'*optimisation* en motivant vos choix.

2. Eléments de correction

1. La situation proposée est issue du domaine géométrique et amène à une modélisation à l'aide d'une fonction.

- Le texte de l'énoncé est le plus court possible. Il présente la situation et la question posée.
- La figure accompagnant l'énoncé est purement explicative (les sommets du carré et celui du triangle ne sont pas nommés).
- Aucune démarche n'est suggérée pour la résolution du problème.
- La solution du problème de minimisation n'est en aucune façon apparente.

Autrement dit, le problème posé a toutes les caractéristiques d'un problème ouvert répondant aux objectifs du programme.

La question « Est-il possible de faire en sorte que l'aire du motif soit la plus grande possible ? » paraît judicieuse, en permettant aux élèves une première réflexion sur la situation proposée.

Le motif a la plus grande aire possible quand *M* est en *B*. Dès lors, on attend la réaction : « de la même façon, c'est quand *M* est en *A* que le motif a l'aire la plus petite, puisque alors le carré disparaît ; forcément la partie laissée en blanc est la plus grande possible »

Dans une classe de troisième, il s'agira de la démarche la plus attendue.

Deux autres démarches peuvent éventuellement apparaître :

- Une utilisation de logiciel de géométrie dynamique. Mais la réalisation de la figure sera assez longue, et seulement à la portée d'élèves expérimentés.
- Une modélisation à l'aide d'une fonction (plutôt attendue au niveau du lycée).

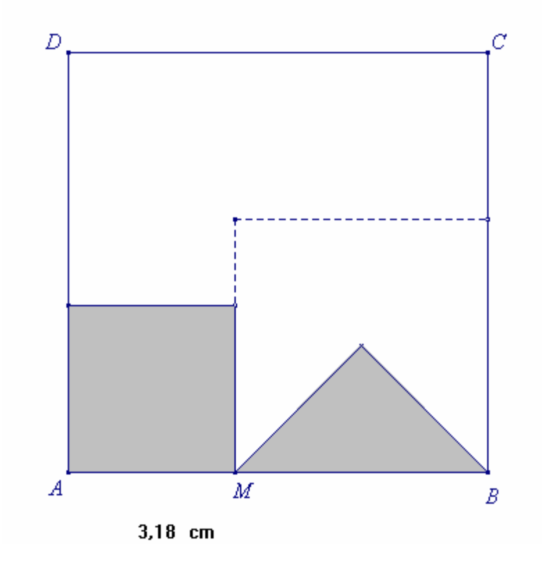
2. Une correction de l'exercice en classe de troisième.

On commencera par calculer l'aire du motif lorsque *M* est en *A*, soit 16 cm^2. S'il n'y a pas de contestation au fait que c'est dans ce cas que le motif a la plus petite aire, il conviendra d'installer d'une façon ou d'une autre le doute à propos de cette conclusion. Pour cela, on peut par exemple demander de calculer l'aire du motif lorsque $AM = 1$

La principale difficulté pour calculer l'aire du motif est de trouver une expression de l'aire du triangle rectangle isocèle.

Il ne faut pas que cette difficulté arrête les élèves prématurément. En classe de troisième, pour faciliter le calcul de cette aire, il est possible de matérialiser sur la figure non seulement le carré de côté {*AM*] mais aussi le carré de côté {*MB*]. Une partition de ce dernier en quatre rectangles isocèles isométriques dont un est le triangle qui nous intéresse donne la réponse.

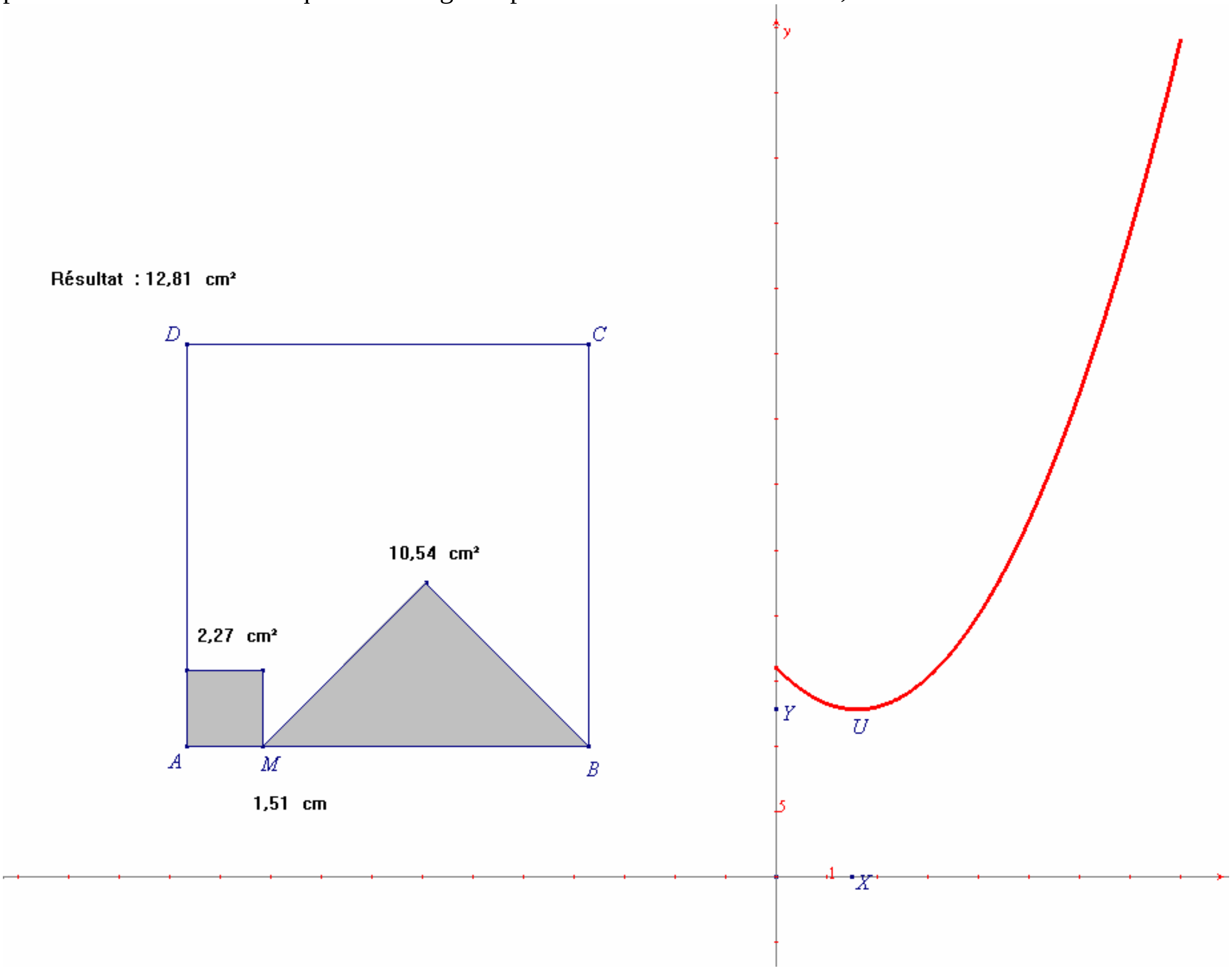
L'aire du motif est la somme de l'aire du carré côté {*AM*] et du quart de l'aire du carré de côté {*MB*].



Lorsque le segment [*AM*] mesure 1 cm, l'aire du motif est égale à $1 + \frac{49}{4} = \frac{53}{4}$ gilbertjulia2014 . Ce qui est plus petit que 16 …

C'est seulement à partir de là que, en classe de troisième, on peut envisager une étude plus approfondie, quitte à relancer la recherche en proposant une modélisation à l'aide d'une fonction.
L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique devient pertinente (le professeur peut avoir préparé la figure à l'avance et la visualiser sur écran devant la classe entière). Ci-dessous, nous avons réalisé la figure et

en même temps nous représenté l'aire du motif en fonction de la longueur du segment [*AM*]. Cette fonction présente un minimum lorsque cette longueur prend une valeur voisine de 1,5.



Il reste à modéliser.

On désigne par x la longueur du segment [*AM*]. De ce fait, x appartient à l'intervalle $[0\ ;\ 8]$. La longueur du segment [*MB*] est égale à $8-x$.
L'aire du motif est une fonction de x, nous la désignerons par $S(x)_{gilbertjulia\,2014}$, son expression est : $S(x)=x^2+\frac{1}{4}(8-x)^2$ et cette fonction est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 8]$.
Il s'agit d'en déterminer le minimum.

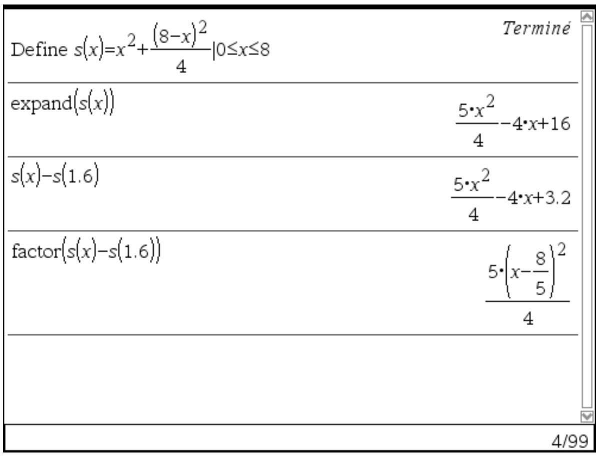
L'utilisation d'un tableur est envisageable.

En particulier, une tabulation de cette fonction avec le pas 0,1 laisse conjecturer que l'aire est minimale lorsque $x=1{,}6$. Des résultats symétriques par rapport à cette valeur renforcent cette conjecture. En classe de troisième, on peut en rester là.

	A am	B aire	C	D
◆	=seq(0.1*x,x,0,80)	=am^2+(8−am)^2/4		
13	1.2	13.		
14	1.3	12.9125		
15	1.4	12.85		
16	1.5	12.8125		
17	1.6	12.8		
18	1.7	12.8125		
19	1.8	12.85		
20	1.9	12.9125		
21	2.	13.		
22	2.1	13.1125		
23	2.2	13.25		
17	=12.8			

Cependant, le calcul puis la factorisation de $S(x)-S(1{,}6)$ permettent de démontrer formellement cette conjecture.

Ci-contre, un logiciel s'est chargé des calculs. Si le développement de l'expression $S(x)_{gilbertjulia2014}=x^2+\frac{1}{4}(8-x)^2$ ne nous apprend pas grand-chose, en revanche la factorisation de $S(x)-S(1{,}6)$ est plus riche d'informations.



Une correction de l'exercice en classe de première.

On parvient à la même modélisation. L'aire est fonction de $x=AM$ et s'exprime par : $S(x)=x^2+\frac{1}{4}(8-x)^2$.

Deux possibilités pour en déterminer le minimum.

- Utiliser l'outil de la dérivation.
- Utiliser la mise sous forme canonique d'un polynôme du second degré.

Le minimum est atteint lorsque $AM=\frac{1}{5}AB$

Dans tous les cas, quel que soit le niveau de classe auquel on s'adresse penser à faire une synthèse des points importants de la démarche de résolution (ce ne sont pas tout à fait les mêmes en troisième ou en première. En troisième on insistera davantage sur le processus de modélisation et en première davantage sur les méthodes du second degré).

Noter que, conformément aux objectifs du programme, cette même situation amène d'autres questions relatives aux fonctions et équations. Il est par exemple intéressant, en prolongement de l'exercice et au niveau de la classe de première, de demander aux élèves : « Est-il possible de faire en sorte que l'aire du motif soit égale à l'aire du domaine laissé en blanc ».

3. Voir REDCM pages 146 à 149. Mais pas seulement (songer éventuellement à un problème de programmation linéaire).

3. Commentaires

Ce type de situation est caractéristique d'un problème ouvert permettant différentes approches. Aucune solution évidente n'apparaît et en même temps la traduction mathématique de la situation ne demande pas des connaissances démesurées, l'exercice est accessible dès le niveau de fin de collège. Un exercice idéal en somme.

Cependant, sa résolution n'est pas immédiate et demande la mise en oeuvre d'une certaine diversité d'outils.

Pour que l'activité présentée ici fonctionne, encore faut-il intéresser les élèves et faire en sorte qu'ils se « prennent au jeu » et adhèrent à un esprit de recherche. C'est seulement si cette condition d'appropriation de la situation est vérifiée que les élèves pourront tirer un bénéfice de son étude. C'est bien là que réside une difficulté majeure du métier d'enseignant.

En classe de première, les élèves sont en principe davantage familiarisés avec la notion de fonction et avec les techniques du second degré, il sera plus facile de mettre en place l'activité.

En l'occurrence, le problème à résoudre se ramène techniquement à la minimisation de l'expression $x^2 + \frac{y^2}{4}$ sous la contrainte $x + y = Cte$