ESD 2014 –03 : Problèmes de géométrie

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

À partir d'un carré *ABCD*, on construit un triangle équilatéral *ABE* à l'intérieur du carré et un triangle équilatéral *CBF* à l'extérieur du carré. Le but de ce problème est de montrer que les points *D*, *E* et *F* sont alignés.

1. Faire une figure.
2. On choisit de travailler dans le repère orthonormé (*A*,*B*,*D*).
2.1. Donner les coordonnées de *A*, *B*, *C* et *D* dans ce repère.
2.2. On appelle *H* le pied de la hauteur issue de *E* dans le triangle *ABE*. Calculer la valeur exacte de la distance *EH* dans ce repère. En déduire les coordonnées de *E* et *F* dans ce repère.
3. Démontrer que les points *D*, *E* et *F* sont alignés.

B. Un extrait des programmes de seconde.

Géométrie

L'objectif de l'enseignement de la géométrie plane est de rendre les élèves capables d'étudier un problème dont la résolution repose sur des calculs de distance, la démonstration d'un alignement de points ou du parallélisme de deux droites, la recherche des coordonnées du point d'intersection de deux droites, en mobilisant des techniques de la géométrie plane repérée.
Les configurations étudiées au collège, à base de triangles, quadrilatères, cercles, sont la source de problèmes pour lesquels la géométrie repérée et les vecteurs fournissent des outils nouveaux et performants.
En fin de compte, l'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier un problème d'alignement de points, de parallélisme ou d'intersection de droites, de reconnaissance des propriétés d'un triangle, d'un polygone, toute autonomie pouvant être laissée sur l'introduction ou non d'un repère,l'utilisation ou non de vecteurs.
Dans le cadre de la résolution de problèmes, l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique par les élèves leur donne une plus grande autonomie et encourage leur prise d'initiative.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Après avoir analysé dans quelle mesure l'énoncé de l'exercice répond aux attentes du programme de seconde, proposez une nouvelle rédaction qui laisse plus de place à l'initiative des élèves.

2. Exposez une correction de la question 3 de l'exercice proposé par le professeur comme vous le feriez devant une classe de seconde

3. Présentez deux ou trois exercices sur le thème *problèmes de géométrie plane*. Vous motiverez vos choix en indiquant en particulier en quoi ils favorisent la prise d'initiative par les élèves.

2. Eléments de correction

1. Voici un exercice qui, il y a quelques années, était dans le « top 5 » des exercices que les candidats préparaient pour le thème « Un même problème, plusieurs solutions ». Au point que les préparateurs mettaient en garde les candidats, car les jurys de CAPES pouvaient voir cet exercice présenté plusieurs fois dans la même journée. Il fallait donc bien en connaître les arcanes. Aujourd'hui, voici qu'il nous est donné à résoudre avec l'outil de la géométrie plane repérée.

Tel qu'il est présenté, cet exercice correspond au programme de seconde sur les points suivants :

- Il s'agit d'un problème d'alignement de points.
- La géométrie repérée et les vecteurs fournissent des outils nouveaux et relativement performants pour résoudre ce problème.

L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique ne me paraît pas appropriée dans cette situation. Tout au plus pourrait-on par ce moyen faire conjecturer aux élèves l'alignement des trois points *D, E, F*. La figure à réaliser n'est pas dynamique, la propriété d'alignement en question étant invariante par similitude, seule « déformation » possible dans ce contexte. Le choix du professeur, qui fait réaliser la figure aux élèves sur papier, paraît tout à fait justifié.

On peut en revanche reprocher à l'exercice d'imposer le choix du repère, ce qui n'encourage pas la prise d'initiative.

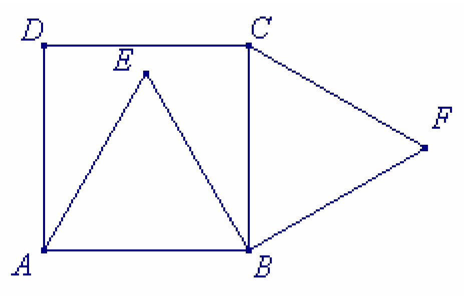
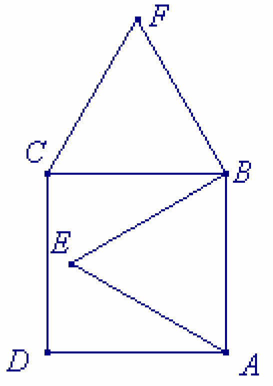
Nouvel énoncé proposé :
À partir d'un carré *ABCD*, on construit un triangle équilatéral *ABE* à l'intérieur du carré et un triangle équilatéral *CBF* à l'extérieur du carré. Le but de ce problème est de montrer que les points *D*, *E* et *F* sont alignés.
1. Faire une figure.
2.1. Choisissez un repère qui vous paraît adapté à la situation.
2.2. Donner les coordonnées des points de la figure dans le repère que vous avez choisi.
3. Démontrer que les points *D*, *E* et *F* sont alignés.

La question « On appelle *H* le pied de la hauteur issue de *E* dans le triangle *ABE*. Calculer la valeur exacte de la distance *EH* dans ce repère. En déduire les coordonnées de *E* dans le repère choisi. Procéder de façon analogue pour *F* » pourrait être gardée pour une différenciation (certains élèves ont cette indication, d'autres non, ou bien cette indication ne leur est donnée qu'après un premier temps de recherche).

2. Une fois que les coordonnées des points utiles sont connues, il y a plusieurs possibilités pour vérifier si les points *D*, *E*, *F* sont, ou non, alignés.

- Ou bien on cherche l'équation d'une droite passant par deux des trois points et on contrôle si oui ou non les coordonnées du troisième point vérifient l'équation de cette droite.
- Ou bien on cherche les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ et on contrôle leur colinéarité.
- Ou bien on calcule les distances deux à deux entre les points *D*, *E*, F et on compare *DF* avec $DE + EF$

Si les élèves ont eu le choix du repère, établir un comparatif entre les performances des repères utilisés, par exemple :

Choix : repère (*A*, *B*, *D*)	Choix : repère (*D*, *A*, *C*)
	
Les coordonnées des points utiles sont respectivement : $D(0\ ;\ 1)\ ;$ gilbertjulia2014 $E\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ ;\ F\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$	Les coordonnées des points utiles sont respectivement : $D(0\ ;\ 0)\ ;$ gilbertjulia2014 $E\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)\ ;\ F\left(\frac{1}{2}\ ;1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
Une équation de la droite (*DE*) : $y=\left(\sqrt{3}-2\right)x+1$	Une équation de la droite (*DE*) : $y=\left(\sqrt{3}+2\right)x$

$\overrightarrow{DE}\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$; gilbertjulia2014 $\overrightarrow{DF}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$	gilbertjulia2014 $\overrightarrow{DE}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$; $\overrightarrow{DF}\left(\frac{1}{2}\ ;\ 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Le choix du repère (D, A, C) présente un léger avantage sur l'autre. On peut aussi dans ce dernier repère, remarquer que (DE) et (DF) sont deux droites qui passent par l'origine et contrôler si elles ont le même coefficient directeur.

3. Voir REDCM « types de problèmes », particulièrement pages 49 à 69.

3. Commentaires

Il est probable que les jurys ont demandé aux candidats de ce jour là, sans pour autant insister outre mesure, s'ils connaissaient au moins une autre méthode de résolution de ce problème d'alignement. Les candidats du jour ont certainement eu intérêt à y songer avant leur passage à l'oral.

En voici une pour la route, sachant que : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et que : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Notons a la mesure du côté du carré. Les triangles DAE, DCF, et EBF sont trois triangles isocèles d'angles d'angles à la base de mesures respectives $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{12}$. Leurs côtés adjacents à leur angle au sommet ont tous pour mesure a.

$$EF_{\text{gilbertjulia2014}} = 2a\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = a\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$DE_{\text{gilbertjulia2014}} = 2a\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = a\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

$$DF_{\text{gilbertjulia2014}} = 2a\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = a\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} = DE + EF\ .$$

Cette égalité signifie que E est un point du segment [DF].

Mais il y a bien d'autres méthodes ...