

ESD 2014 –01 : Modélisation

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Boule	100 % acier
Diamètre de la boule	73 mm
Masse de la boule	720 g
Stries	sans
Aspect	satiné

Métaux	Masse volumique (en kg/m ³)
Aluminium	2700
Cuivre	8800
Ferforgé	7600
Acier	7775
Nickel	8700
Titane	4540

Une boule de pétanque est-elle pleine ou creuse ?

B. Les productions de deux groupes d'élèves de troisième

Production 1

kg	hg	dag	g
0,	7	2	0

Le volume de la boule est : $V = \frac{m}{m_v} = \frac{0,720}{7775} = 0,000092605 \text{ m}^3$

On a aussi $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 36,5^3 = 203689 \text{ mm}^3$
 Mais, cela ne correspond pas, on a du faire une erreur.

Production 2

73 mm ÷ 2 = 36,5 mm = 0,0365 m
 Avec le tableur, nous avons trouvé qu'une boule pleine pèse 1,583 kg
 La boule de pétanque est moins lourde, donc elle est creuse et il y a 863 g de vide.
 Ensuite, comme vous l'avez demandé à notre groupe, nous avons cherché l'épaisseur d'acier de cette boule de pétanque.
 Avec le tableur, on a essayé plusieurs valeurs pour trouver le rayon d'une boule d'acier de 863 g.
 0,0365 – 0,0298 = 0,0067
 Ce qui fait une épaisseur de 6,7 mm.

Rayon	Volume	Masse
0,0365	0,000203689	1,58368061
0,01	4,18879E-06	0,03256784
0,02	3,35103E-05	0,26054275
0,03	0,000113097	0,87933178
0,029	0,00010216	0,79429714
0,0295	0,000107536	0,8360939
0,0297	0,000109738	0,85321475
0,0298	0,00011085	0,86186213
0,0299	0,00011197	0,87056774

C. Le travail à exposer devant le jury

- Analysez les deux productions en mettant en évidence les compétences acquises.
- En vous appuyant sur les productions, proposez une correction telle que vous l'exposeriez devant une classe de troisième
- Présentez deux ou trois problèmes sur le thème *modélisation*, en prenant soin d'expliquer ce qui a motivé vos choix.

2. Eléments de correction

1. L'exercice proposé est un « problème ouvert » qui a visiblement donné lieu à une activité de recherche en classe, chaque groupe d'élèves devant rédiger une narration de recherche décrivant sa démarche de résolution, même si cette démarche n'aboutit pas.

Groupe 1.

Résolution incorrecte.

Ce groupe choisit de calculer de deux façons le volume de la boule de pétanque supposée pleine.

Il calcule d'abord le volume d'une boule d'acier de masse donnée.

Il calcule ensuite correctement le volume d'une boule de rayon donné et compare les deux résultats.

On ne sait pas si ce groupe sait effectuer une conversion d'unités (il teste si 203689 mm^3 « correspond » à $0,000092605 \text{ m}^3$, et la non correspondance est certainement attribuée aux valeurs numériques obtenues, plutôt qu'à une puissance de dix incorrecte).

Ce groupe met alors en cause l'exactitude de ses résultats plutôt que de tirer une conséquence de résultats différents et trancher entre « creuse » et « pleine ». Ce manque de confiance en soi fait échouer la résolution de l'exercice.

Ce groupe a su :

- S'engager dans une démarche pertinente.
- Effectuer des calculs de grandeurs (volumes). En particulier, il a su reconnaître et exploiter une situation de proportionnalité gilbertjulia2014 (le volume d'une boule homogène et sa masse sont des grandeurs proportionnelles).

En revanche ce groupe n'a pas su valider sa démarche ni prendre une décision au vu des résultats obtenus. Cette erreur d'appréciation peut être due au contrat didactique habituel (« quand on calcule quelque chose de deux façons, on trouve toujours le même résultat »). Il faudrait leur faire vérifier les calculs et les faire réfléchir sur ce qui distingue une boule « creuse » d'une boule « pleine ».

Groupe 2.

Résolution correcte, démarche pertinente.

Ce groupe choisit d'utiliser un tableur et tabule correctement le volume et la masse d'une boule pleine en fonction de son rayon.

Il calcule ainsi le volume et la masse d'une boule pleine de rayon 36,5 mm.

Il évalue ensuite par approximations au dixième de millimètre le rayon d'une boule pleine de même masse que l'écart de masse constaté (863 g) et en déduit par différence une valeur approchée de l'épaisseur d'acier.

Ce groupe a su :

- Elaborer et exploiter à bon escient une simulation numérique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel. Il est à souligner que le travail de ce groupe est un excellent exemple d'utilisation raisonnée des outils logiciels : ce groupe ne perd jamais la main, il oriente et exploite les résultats numériques affichés par le tableur. Le jury nous fournit un document où l'acquisition de la compétence : « utiliser à bon escient des outils logiciels comme auxiliaires à la résolution », au moins par le leader du groupe, est incontestable.
- Développer une argumentation mathématique correcte.

2. Le professeur de la classe concernée a déjà préparé la façon dont il compte mener sa correction, puisqu'il a demandé au groupe 2 d'évaluer l'épaisseur de la boule. En effet, la résolution de l'exercice peut se dérouler en deux temps :

- Mettre en évidence que la boule de pétanque n'est pas une boule pleine.
- Evaluer d'une façon ou d'une autre l'épaisseur d'acier de la boule creuse et c'est dans cette phase qu'intervient la « modélisation ».

Il peut être opportun de commencer par uniformiser les unités employées. Les données relatives à la boule utilisent le gramme et le mm^3 , alors que les masses volumiques sont données dans le système MKS. On peut privilégier l'emploi du système MKS ou bien convenir que l'usage du gramme et du millimètre est mieux adapté à la situation (au candidat de choisir).

Les travaux des deux groupes permettent d'établir que la boule est creuse :

Le premier groupe a tous les éléments pour conclure qu'une boule de pétanque a un volume plus de deux fois plus grand que celui d'une boule pleine de même masse.

Le deuxième groupe trouve qu'une boule pleine de même volume que la boule de pétanque aurait une masse plus de deux fois plus grande.

Si la boule est creuse, il reste à évaluer son épaisseur. On demande d'abord aux élèves leur avis *a priori* : « le groupe 2 a trouvé 6,7 mm ; êtes-vous d'accord ? Est-elle d'après vous plus épaisse ? Moins épaisse ? ». On attend par exemple l'idée que : « l'épaisseur est proportionnelle à la masse, soit de l'ordre de 16,6 mm ».

On passe à une modélisation.

Pour cela on peut saisir au vol le côté comique de « il y a 863 g de vide » et faire expliciter ce que le groupe 2 veut dire : une boule de pétanque peut être modélisée par une boule homogène de rayon 36,5 mm évidée d'une boule de même centre et de rayon plus petit que 36,5.

gilbertjulia2014

La démarche du groupe 2 peut être reprise légèrement améliorée.

	A rayon	B epaisseur	C volume	D masse
=	=seq(0.1*r,r,0	=36.5-rayon	=4*π*((36.5)^3-rayon^3)/	=0.00775*volume
291	29.	7.5	101528.	786.845
292	29.1	7.4	100468.	778.627
293	29.2	7.3	99400.1	770.351
294	29.3	7.2	98325.	762.019
295	29.4	7.1	97242.5	753.63
296	29.5	7.	96152.6	745.183
297	29.6	6.9	95055.3	736.679
298	29.7	6.8	93950.6	728.117
299	29.8	6.7	92838.4	719.498
300	29.9	6.6	91718.7	710.82
301	30.	6.5	90591.5	702.084

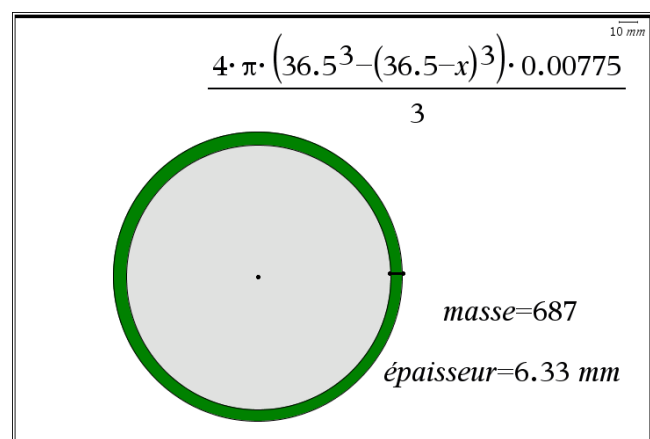
Une alternative consiste à modéliser à l'aide d'une fonction numérique. Si R est le rayon de cette dernière boule, exprimé en millimètres, $x = 36,5 - R$ représente l'épaisseur d'acier, exprimée en millimètres. Il sera préférable (mais pas obligatoire) de choisir x plutôt que R pour représenter la situation.

On explicite alors le volume d'acier et la masse de la boule de pétanque, exprimée en grammes, en fonction de x .

Une figure dynamique peut donner une idée de la variation de la masse de la boule évidée lorsqu'on fait varier l'épaisseur.

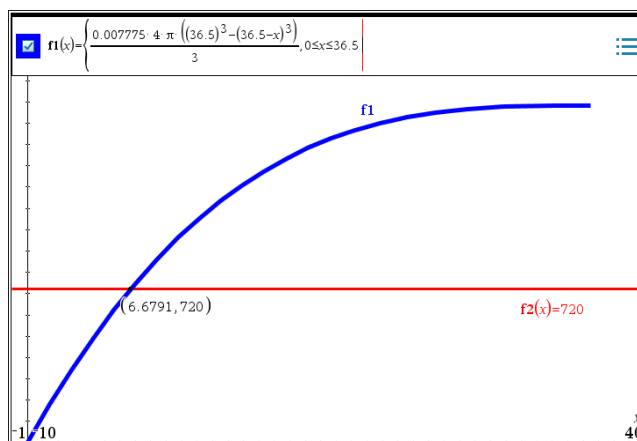
gilbertjulia2014

Il apparaît clairement que l'idée que « l'épaisseur est proportionnelle à la masse » est fautive, ce qu'on peut expliquer par le fait que la masse est proportionnelle à un volume et non à une longueur.



Une représentation graphique de la fonction masse aide à évaluer l'épaisseur de la boule de pétanque correspondant à une masse de 720 grammes et confirme les résultats obtenus par le groupe 2.

gilberjulia2014



3. Voir (entre autres, la modélisation dépasse le cadre strict de l'analyse) REDCM pages 123 à 126.