ESD 2014E –15 : Equations différentielles

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Pour étudier l'évolution d'une population de poissons au cours du temps, on propose plusieurs modèles. On appelle N la fonction représentant le nombre de poissons en fonction du temps t (exprimé en années). On sait que $N(0)=2000$

1. On suppose dans cette question que la fonction N est solution de l'équation différentielle : (E1) $y'=r\,y$ où r est une constante strictement positive.
1.1. Résoudre l'équation différentielle (E1).
1.2. Donner l'expression de la fonction N.
1.3. Représenter à l'aide d'un logiciel de géométrie les fonctions N lorsque r varie dans l'intervalle $[0\ ;4]$.
2. On suppose dans cette question que la fonction N est solution de l'équation différentielle :
(E) $y'=2y\left(1-\dfrac{y}{4000}\right)$. On admet que N est définie et strictement positive sur $[0\ ;+\infty[$.

On pose, pour t appartenant à $[0\ ;+\infty[$, $g(t)==\dfrac{1}{N(t)}$

2.1. Démontrer que g est solution sur I de l'équation différentielle (E0) : $y'=-2y+\dfrac{1}{2000}$
2.2. Résoudre, en utilisant éventuellement un logiciel de calcul formel, l'équation différentielle (E0).
2.3. En déduire que sur $[0\ ;+\infty[$, $N(t)=\dfrac{4000}{\mathrm{e}^{-2t}+1}$

B. Un extrait des programmes de STS sur les équations différentielles (BO du 4 juillet 2013)

On s'attache à relier les exemples étudiés avec les enseignements scientifiques et technologiques, en montrant l'importance de l'étude de phénomènes continus définis par une loi d'évolution et une condition initiale. L'utilisation des outils logiciels est sollicitée ; elle a pour finalités :
– de mettre en évidence, expérimentalement, la signification ou l'importance de certains paramètres ou phénomènes ;
– de dépasser la seule détermination des solutions d'une équation différentielle en donnant la possibilité de visualiser des familles de courbes représentatives de ces solutions ;
– de permettre, avec l'aide du calcul formel, de donner une expression des solutions dans certains cas complexes. Si, dans ce module, on développe plus particulièrement deux types d'équations différentielles, on est également attentif à donner une vision plus large de ces notions en présentant des équations différentielles dont on ne peut donner qu'une solution approchée tout en faisant saisir des principes généraux comme la notion de famille de solutions.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez dans quelle mesure cet exercice correspond aux attentes du programme de STS.

2. Proposez une correction de la question 2 telle que vous la présenteriez devant une classe de STS.

3. Présentez deux ou trois exercices sur le thème équations différentielles**.**

2. Eléments de correction

1. L'exercice propose une pseudo-contextualisation de quelques équations différentielles. Mais les poissons dont il est question sont peu bavards sur les lois d'évolution régissant leur écosystème. Il s'agit certainement de carpes.

Relier les exemples étudiés avec les enseignements scientifiques et technologiques :
Non. Le lien est totalement artificiel.

Mettre en évidence, expérimentalement, la signification ou l'importance de certains paramètres ou phénomènes : Aucune trace.

Dépasser la seule détermination des solutions d'une équation différentielle en donnant la possibilité de visualiser des familles de courbes représentatives de ces solutions :
Dans la question 1.3, on représente bien une « famille » de fonctions. Mais il ne s'agit pas d'une « famille de solutions », puisque l'équation différentielle change chaque fois que l'on change la valeur de r.

Permettre, avec l'aide du calcul formel, de donner une expression des solutions dans certains cas complexes. Démarche suggérée dans la deuxième question.

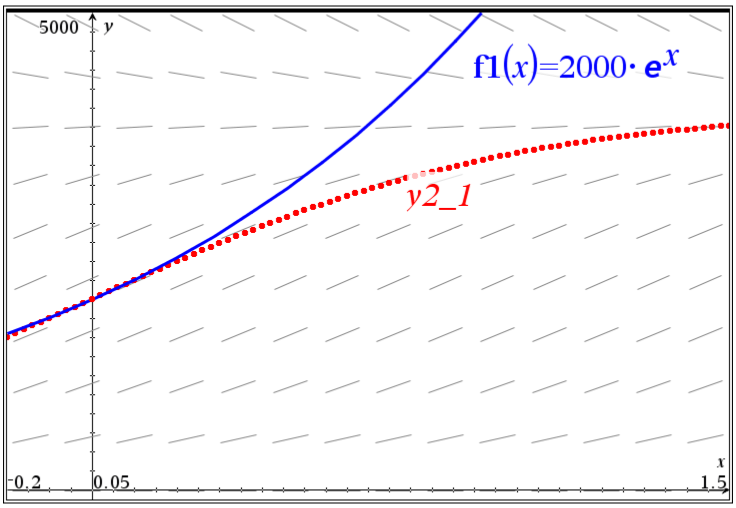
Notion de famille de solutions : Non.

Rien dans l'énoncé n'évoque les lois d'évolution qui sont sous-jacentes aux équations différentielles qui nous sont présentées. Moyennant quoi, cet exercice perd une grande partie de son sens. Aussi, deux hypothèses me viennent à l'esprit à propos de l'origine de l'exercice :

- Soit il s'agit d'un exercice sur les équations différentielles antérieur à juillet 2013 adapté « tant bien que mal » par son auteur aux directives du B.O.
- Soit, et c'est peut être plus probable, le jury a délibérément amputé son texte original de quelques passages clefs pour laisser le champ libre aux commentaires des candidats.

Cet exercice met en effet en scène deux modèles de référence et deux types d'évolution que les candidats au CAPES se doivent de connaître, le modèle exponentiel qui se caractérise par un taux de variation constant (étudié dans la première question) et le modèle logistique, caractérisé par un taux de variation affine (deuxième question). Ces modèles sont sommairement étudiés dans REDCM page 126, le lecteur pourra éventuellement s'y reporter. Il appartenait impérativement aux candidats de lui restituer ce sens et d'expliquer le plus clairement possible ce que signifiait pour eux « on envisage plusieurs modèles ».

Il est intéressant de faire représenter par un logiciel sur un même graphique la fonction solution de l'équation différentielle de la deuxième question ainsi que la solution de l'équation de la première question où la dérivée en zéro est la même (c'est-à-dire lorsque $r=1$).
Ici, les deux fonctions ont été représentées pendant 1,5 année.
On se rend compte que, si dans les premiers mois l'évolution de la population est à peu près la même dans les deux modèles, ensuite les évolutions se différencient radicalement. Il y a là matière à discussion …



2. Laissée au lecteur.

3. Voir REDCM pages 173 à 177.

3. Pour aller plus loin

Je propose de résoudre plus généralement, avec la méthode de l'exercice, l'équation : $y' = k\,y\left(1-\frac{y}{M}\right)$, où k et M sont deux constantes strictement positives. Cette équation se rencontre dans le modèle logistique, sous cette forme ou sous une autre.

Soit donc $t \mapsto N(t)$ une solution de cette équation différentielle définie et strictement positive sur $[0\,;+\infty[$ et g la fonction définie par : $g(t)=\frac{1}{N(t)}$

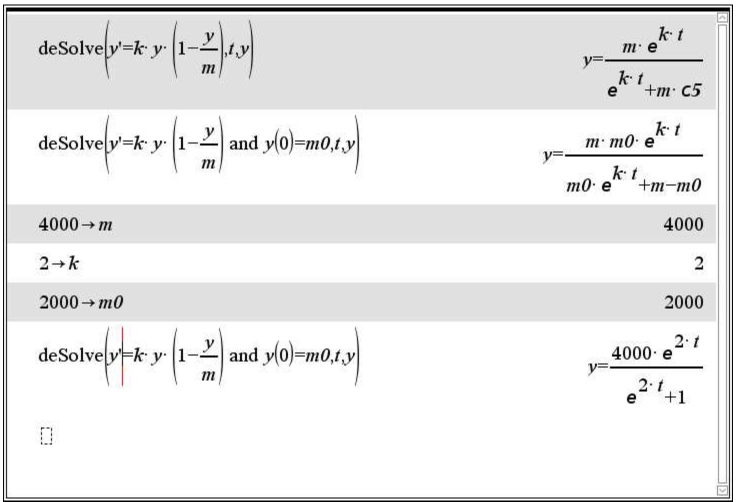
La dérivée de la fonction g sur $[0\,;+\infty[$ est définie par : $g'(t)=-\frac{N'(t)}{(N(t))^2}$

Dire que N est solution de (E) sur $[0\,;+\infty[$ signifie que pour tout réel t de cet intervalle :
$N'(t)=k\,N(t).\left(1-\frac{N(t)}{M}\right)=k\,N(t)-\frac{k\,(N(t))^2}{M}$. Puisque N ne s'annule en aucun point de $[0\,;+\infty[$, cette identité est équivalente à l'identité :
Pour tout t de $[0\,;+\infty[$, $\frac{N'(t)}{(N(t))^2}=\frac{k}{N(t)}-\frac{k}{M}$, c'est-à-dire à : $g'(t)=-k\,g(t)+\frac{k}{M}$.
Si N est une fonction strictement positive sur $[0\,;+\infty[$ solution de (E) alors la fonction g définie par : $g(t)=\frac{1}{N(t)}$ est, sur cet intervalle, une solution de : $y'=-k\,y+\frac{k}{M}$ (E2). De plus, N est strictement positive si et seulement si g l'est aussi.
L'ensemble des solutions de (E2) est l'ensemble des fonctions définies par : $g(t)=\frac{1}{M}+C\,\mathbf{e}^{-kt}$ où C est une constante réelle. Il s'agit d'une fonction strictement positive sur $[0\,;+\infty[$ si et seulement si $C>-\frac{1}{M}$.
Les fonctions N strictement positives sur $[0\,;+\infty[$ solutions de (E) sont les fonctions de la forme : $N(t)=\frac{1}{\frac{1}{M}+C\,\mathbf{e}^{-kt}}=\frac{M}{1+M\,C\,\mathbf{e}^{-kt}}$ avec C constante réelle telle que $C>-\frac{1}{M}$.

Celle qui prend en zéro une valeur M_0 donnée est la fonction : $N(t)==\frac{M}{1+\frac{M-M_0}{M_0}\mathbf{e}^{-kt}}$

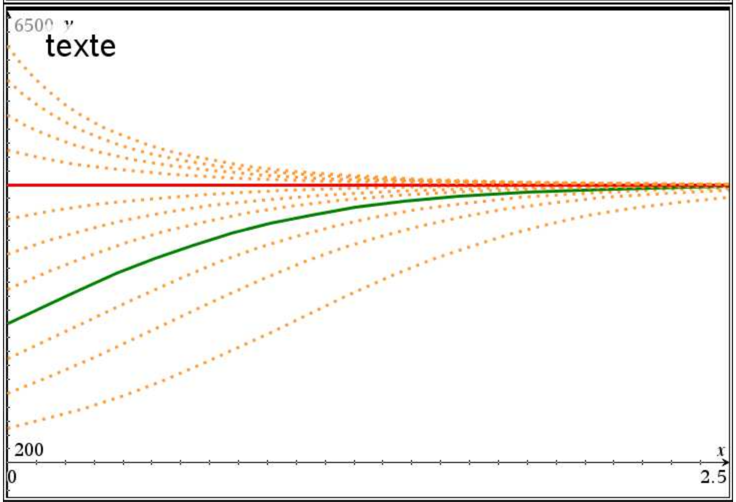
Celle qui prend en zéro la valeur 2000 est la fonction : $N(t)==\frac{M}{1+\frac{M-2000}{2000}\mathbf{e}^{-kt}}$

L'usage d'un logiciel de calcul formel et d'un autre de représentation graphique permet dès lors quelques mises en perspective :



L'écran ci-contre reprend, sous une expression un peu différente, quelques-uns des résultats ci-dessus avec l'outil **deSolve** de résolution d'équations différentielles.

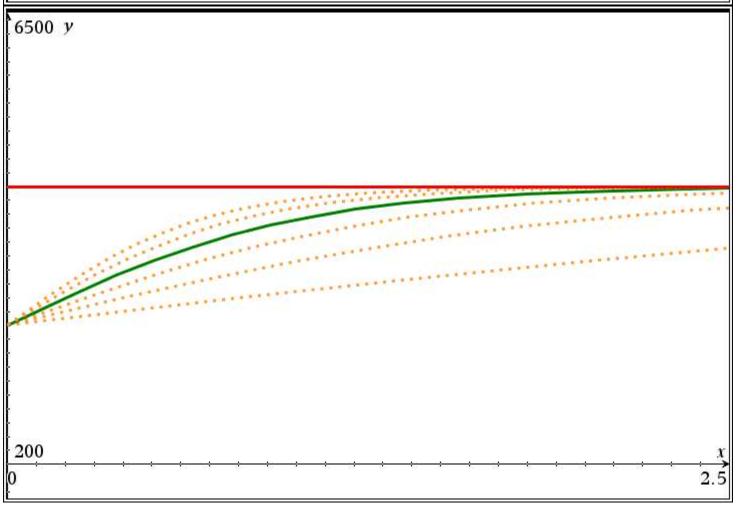
Lorsque $M=4000$; $k=2$ et lorsque $M_0=2000$, on retrouve la fonction donnée par l'énoncé.



Un logiciel de représentation graphique permettrait d'étudier l'importance de certains paramètres.

Ci-contre, l'impact de la condition initiale :

Le nombre de poissons a toujours tendance à se stabiliser à plus ou moins long terme vers la valeur 4000, indépendamment du nombre de poissons à l'instant zéro. Si ce nombre est < 4000, le nombre de poissons va croissant, sinon il va décroissant.



Le coefficient k agit, quant à lui, sur la vitesse de stabilisation de la population de poissons.