ESD 2014E –14 : Matrices et suites

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

On considère une population d'êtres vivants qui ne peuvent se trouver que dans deux états désignés par A et B. À l'instant initial, 34% des êtres vivants de cette population sont dans l'état A.
On propose le modèle d'évolution suivant : à chaque heure,

- 3% des êtres vivants qui étaient dans l'état A passent dans l'état B
- 3,5% des êtres vivants qui étaient dans l'état B passent dans l'état A

1. Avec ce modèle, y aura-t-il plus d'êtres vivants dans l'état A que dans l'état B au bout d'un jour ?

2. Avec ce modèle, peut-on dire qu'au bout d'un certain nombre d'heures la proportion d'êtres vivants se trouvant dans l'état A va se stabiliser ? Si oui, préciser vers quelle valeur.

B. Les réponses de trois élèves de terminale S à la question 1

Élève 1

$u_{24} = 1{,}005^{24} \times 34 \approx 38{,}3$. *Au bout de 24 heures, cela reste inférieur à 50%.*

Élève 2

Dans le tableur : $A1 = 34$; $B1 = 66$

$A2 = A1 - 3\% * A1 + 3{,}5\% * B1$; $B2 = B1 + 3\% * A1 - 3{,}5\% * B1$

En tirant, j'obtiens $A25 = 49{,}891$ *Cela ne dépassera pas 50% au bout d'un jour.*

Élève 3

Posons $T = \begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}03 \\ 0{,}035 & 0{,}965 \end{pmatrix}$ *et* $A = \begin{pmatrix} 0{,}34 & 0{,}66 \end{pmatrix}$. *On a :* $A \times T^{24} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

Il y a autant d'êtres vivants dans l'état A que dans l'état B.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Explicitez les démarches des élèves en mettant en évidence les compétences mathématiques acquises.

2. Proposez une correction la question 2 de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale S, spécialité mathématiques.

3. Présentez deux ou trois exercices sur le thème *matrices et suites*.

2. Eléments de correction

1. L'exercice a pour objectif l'étude d'un processus de Markov à deux états. Deux choix didactiques pertinents rendent cet exercice intéressant car ils privilégient le raisonnement et le recours aux potentialités du calcul matriciel, au détriment de solutions plus empiriques basées sur l'utilisation d'un tableur.

- Les pourcentages de transformation d'un état à l'autre entre deux instants sont faibles, ce qui va entraîner une stabilisation lente.
- La stabilisation a lieu pour une répartition entre les deux états A et B qui ne peut pas être devinée, la répartition $\begin{pmatrix}\frac{7}{13} & \frac{6}{13}\end{pmatrix}$ $_{gj2014}$.

Elève 1.
Cet élève propose le raisonnement suivant : « Puisqu'il il y a 3% d'êtres vivants qui passent de A à B et 3,5% qui passent dans l'autre sens, c'est que la proportion de la population dans l'état A augmente de 3,5% - 3% = 0,5% par heure. Si on désigne par u_n cette proportion de population au bout de n heures, la suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison 1,005 et de premier terme $u_0 = 34$. On doit calculer u_{24} ».
Cet élève est capable de lier une variation à taux constant à une suite géométrique et d'utiliser correctement l'outil des suites géométriques (son résultat est conforme à sa modélisation).

La modélisation qu'il propose est incorrecte, puisqu'il effectue une opération illicite sur des pourcentages (il raisonne comme si les populations dans les deux états avaient le même effectif). On peut espérer que, lorsqu'il s'attaquera à la question 2, ses conclusions le laisseront songeur (une proportion peut-elle tendre vers + ∞ ? …). À défaut, pour lui faire prendre conscience de son erreur, ou pourrait (par exemple) lui demander ce que serait, selon son modèle, la pourcentage de population dans l'état A au bout de deux semaines. Il trouverait environ 181, est-ce possible ?

Elève 2.
La démarche de cet élève consiste à utiliser un tableur pour déterminer des valeurs approchées des proportions de population dans chacun des deux états pendant au moins les premières 24 heures. Il a écrit la formule correcte donnant les proportions au bout d'une heure puis a recopié la formule vers le bas.
Il a su analyser le problème, extraire, organiser et traiter l'information utile puis élaborer et utiliser à bon escient une simulation numérique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel. Sa démarche est correcte et son résultat est exact.
Cependant, l'usage du tableur ne lui permettra pas de résoudre la question 2, il devra probablement changer de stratégie.

Elève 3.
Cet élève a su reconnaître et traduire en langage mathématique (à l'aide du calcul matriciel) le type de situation présentée, choisir un cadre adapté à sa résolution.
Il a identifié la matrice de transition déterminant les proportions à une certain instant à partir des proportions une heure plus tôt, et a implicitement représenté les proportions de population à l'instant n par une matrice ligne $L_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ dont la somme des termes est égale à 1.
Son résultat est exact, bien que sa réponse soit trop sommairement rédigée. On pourra confronter les résultats de cet élève (qui a certainement utilisé un affichage flottant 2) avec ceux de l'élève 2. Les proportions de population s'égalisent en effet au cours de la 25$^{\text{ème}}$ heure.

2. La situation proposée se prête au traitement du thème de S spécialité « Suites de matrices colonnes vérifiant une relation de récurrence du type $U_{n+1} = A \times U_n$ »
On peut utiliser les productions des élèves 2 et 3.

On mettra d'abord en évidence l'insuffisance de la méthode tableur de l'élève 2 : il faut recopier très loin vers le bas pour conjecturer une relative stabilisation des résultats et de toute façon le tableur ne permet pas de savoir exactement vers quelle répartition entre les deux états.

La production de l'élève 3 est mieux exploitable, car elle installe la situation dans un cadre plus performant, bien adapté à une résolution complète.

- Si on représente comme lui la répartition entre les deux états par une matrice ligne, on explicite la relation de récurrence $L_{n+1} = L_n \times T$ entre les répartitions aux instants n et $n+1$
- Si la suite de matrice lignes (L_n) converge, elle ne peut converger que vers une solution de l'équation matricielle $X = X \times T$, précisément vers celle(s) des solutions dont la somme des termes vaut 1 ce qui conduit à la seule limite possible, la matrice ligne : $L_{gj2014} = \begin{pmatrix} \frac{7}{13} & \frac{6}{13} \end{pmatrix}$.
- En revenant sur le tableur de l'élève 2 et en « tirant vers le bas » assez loin, on peut conforter cette conjecture (mais non la démontrer …).

- En passant du calcul matriciel à l'outil des suites numériques, on peut se proposer de prouver le résultat. On construit une relation de récurrence entre les termes de rangs n et $n+1$ de la suite (p_n) uniquement, en l'occurrence la relation : $p_{n+1} = 0{,}97\,p_n + 0{,}035(1 - p_n) = 0{,}935\,p_n + 0{,}035$ puis on étudie cette suite comme une suite arithmético-géométrique (étude laissée au lecteur).
- On devrait arriver à une expression explicite de p_n, à savoir : $_{gj2014}\quad p_n = \frac{7}{13} - \frac{129}{650}(0{,}935)^n$, et à la conclusion que la suite (p_n) converge effectivement vers $\frac{7}{13}$.

En conclusion, on peut énoncer la propriété plus générale : « Pour tout processus de Markov d'ordre 2 dont la matrice de transition ne comporte pas de zéro, l'état L_n à l'ordre n converge vers un état L indépendant de l'état initial L_0. De plus, $L = L \times T$ ».

Une variante consisterait à représenter la répartition entre les deux états non par une matrice ligne comme l'a proposé l'élève 3 mais par une matrice colonne C_n, conformément au programme. La relation de récurrence : entre deux termes consécutifs de la suite de matrices colonnes serait alors $C_{n+1} = {}^tT \times C_n$

3. Voir REDCM pages 108 à 110 (mais pas seulement). Voir notamment le document d'accompagnement des programmes à propos du calcul matriciel.