Ce document propose deux sujets sur un même thème, l'un posé en 2013 et l'autre posé en 2014. Voici d'abord le sujet de la session 2013, tel qu'il figurait dans la série des sujets 2013 (je l'en ai retiré) :

Ce sujet est quelque peu déroutant. On peut s'interroger sur les raisons qui ont conduit le jury à sélectionner cet exercice, posé paraît-il dans une classe de terminale scientifique (!!!), et les productions d'élèves qui l'accompagnent, pour le proposer aux candidats. Quelle analyse attendait-il ? Quelles critiques ? Je n'ai pas la réponse, et je reconnais que quelque chose m'échappe. Au lecteur de se faire sa propre opinion.

ESD 2014E –11 : Optimisation

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

On veut construire un triangle *ABC* isocèle en A tel que $AB = AC = 10$. Quelle est l'aire maximale d'un tel triangle ?

B. Les réponses de deux élèves de terminale scientifique

Élève 1

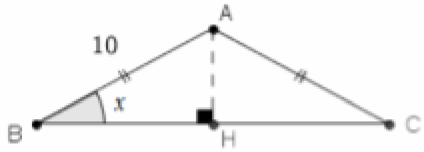
Avec un logiciel de géométrie, je crée un segment $[AB]$ de longueur 10.
Je place C sur le cercle de centre A passant par B.
En déplaçant C sur ce cercle, je vois que l'aire maximale du triangle ABC est 50.

Élève 2

Je nomme x la mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$ avec $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Je calcule AH et BH et l'aire vaut $100\sin(x)\cos(x)$. En dérivant, je trouve $100\cos^2(x) - 100\sin^2(x)$.

Avec le tableur de ma calculatrice, je lis que la dérivée s'annule pour $x = 0{,}8$ environ. Ce qui donne une aire maximale de $49{,}98$ environ.



C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence ses compétences et celles qu'il conviendrait de développer.

2. Exposez une correction de cet exercice, telle que vous la présenteriez devant une classe de terminale scientifique.

3. Présentez deux ou trois problèmes d'*optimisation* dont l'un au moins peut amener à utiliser un logiciel.

2. Eléments de correction

1. Voici un exercice à l'énoncé on ne peut plus laconique. Il pourrait se classer dans la catégorie des « problèmes ouverts » (voir REDCM page 22) où l'objectif visé est d'entraîner les élèves à prendre des initiatives, à apprendre à chercher et à développer une argumentation mathématique. Cependant, on peut regretter que la situation soit d'une consternante pauvreté pour une classe de terminale scientifique. À ce niveau de classe, et même largement avant, ce qu'on nous présente procède plus du secret de Polichinelle que du problème de mathématiques. Un critère important d'un authentique « problème ouvert » n'est pas respecté : qu'il y ait réellement quelque chose à chercher. Plusieurs démarches sont ici envisageables, ne présentant pas de difficultés techniques.

Analyse des travaux d'élèves
Elève 1.
Cet élève possède peut-être une compétence : « expérimenter en utilisant éventuellement des outils logiciels ». C'est tout. Il ne s'engage dans aucune démarche de résolution.
Quant aux domaines où l'élève doit progresser, mystère et boule de gomme, vu qu'on n'a aucune trace d'activité mathématique (Voir commentaire en fin de sujet).

Elève 2.
Cet élève a su « modéliser la situation à l'aide d'une fonction » et « proposer un traitement mathématique ».
Il a choisi un paramètre (une mesure d'angle notée *x*) lui permettant de décrire la situation et a construit une fonction-objectif pertinente (aire du triangle exprimée en fonction de *x*) dont il a identifié le traitement mathématique adéquat (étude des variations). Mais il n'a pas su mener à bien ce traitement. Il propose une solution approchée (certainement par construction d'un balayage avec le pas 0,1), ce qui est mieux que rien, mais qui n'a suscité chez lui aucune conjecture. On peut supposer que la calculatrice dont il dispose ne possède pas de module de calcul formel.

Cet élève doit progresser essentiellement dans le domaine du calcul : « Exercer l'intelligence du calcul : choisir des transformations, effectuer des simplifications ». Visiblement, il ne maîtrise pas les relations trigonométriques élémentaires. En particulier, en terminale S, savoir résoudre l'équation $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$ est une capacité exigible que cet élève ne possède pas.

2. Si on souhaite débuter une correction par l'expérimentation de l'élève 1, ce sera pour affirmer haut et fort que la « conclusion » de cet élève n'est qu'une *conjecture* et que le travail demandé commence exactement là où cet élève a fini. Il s'agit de se donner les moyens de valider ou d'invalider cette conjecture, par exemple en modélisant à l'aide d'une fonction, mais ce n'est pas la seule piste possible.

La façon dont cet élève a construit sa figure amène à choisir comme paramètre une mesure *t* en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Pour des raisons de symétrie, il suffit que *t* décrive l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ pour traiter le problème dans sa globalité.

L'aire du triangle *ABC* s'exprime en fonction de *t* : $A_1(t) = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \sin t = 50 \sin t$.

Elle est maximale lorsque $\sin t$ est maximal, donc quand $t = \frac{\pi}{2}$. L'angle de sommet *A* du triangle est alors un angle droit.

Puis on peut s'intéresser à la production de l'élève 2, élève qui a choisi un autre paramètre.
Il a trouvé (correctement) : $A_2(x) = 100 \sin x . \cos x$. On suit sa démarche jusqu'à ce point. Y a-t-il mieux à faire que de dériver cette fonction ? Avant de se précipiter sur un calcul de dérivée, un instant de réflexion sur un moyen d'obtenir autrement les variations ou un extremum peut être profitable.
En effet, une relation trigonométrique amène à l'expression : $A_2(x) = 50 \sin 2x$.

L'aire est maximale lorsque $\sin 2x$ est maximal , donc quand $x = \frac{\pi}{4}$. On obtient la même configuration que précédemment.

Mais pouvait-on raisonner géométriquement, sans modéliser ?

Si on désigne par *H* le pied sur (*AB*) de la hauteur issue de *C*, l'aire de *ABC* est $\frac{1}{2} \times AB \times CH$

est maximale lorsque *CH* est maximal, c'est-à-dire, en considérant la figure de l'élève 1 où *C* est « placé sur le cercle de centre *A* passant par *B* », lorsque *C* est sur la perpendiculaire en *A* à (*AB*).
Les trois démarches concordent.

Il reste à faire une synthèse :

- Le triangle *ABC* a une aire maximale lorsque *ABC* est rectangle en *A*.
- Plusieurs démarches permettent de démontrer ce résultat. Aucune ne se détache vraiment des autres.
- On a proposé deux modélisations différentes. Le paramètre choisi comme variable de référence n'y est pas le même mais on obtient le même triangle *ABC* « idéal ». On peut donc choisir plusieurs paramètres différents pour décrire une même situation.
- L'exercice est résolu à partir du moment où l'on a construit une preuve de ce que l'on avance (mais il faut reconnaître que cet exercice n'est pas très motivant pour cela).

3. Commentaires

1. La production indigente de l'élève 1 interpelle. Elle constitue à mon sens un exemple d'école, représentatif d'une dérive majeure de l'enseignement des mathématiques actuel qui a tendance à devenir un enseignement du « jevoisque ». Voici un élève, de terminale scientifique par-dessus le marché, capable d'expérimenter sur un ordinateur mais incapable de la moindre réflexion mathématique à propos de son expérimentation.

La compétence « savoir expérimenter en utilisant éventuellement un outil logiciel » n'en est une que si cette phase d'expérimentation amène à des conjectures, un questionnement sur ces conjectures, puis à un traitement mathématique permettant une validation (ou non) de ces conjectures. Autrement dit, cette compétence ne prend son sens que si d'autres compétences viennent, en aval, en prendre le relais.

Dans le cas de l'élève 1, cette prétendue « compétence » est clairement contre-productive puisqu'elle dédouane cet élève de toute activité mathématique digne de ce nom. Faut-il alors « mettre en évidence » cette compétence comme le demande le jury ? Cela se discute, compte tenu de la disproportion entre l'artillerie lourde ainsi déployée et l'inconsistance de l'exercice. Je ne suis pas certain que cette compétence soit mobilisée à bon escient. Le travail de cet élève plus à voir avec la notion de « brassage de vent » qu'avec la notion de « tâche complexe ». Mais il faut reconnaître, circonstance atténuante, que le travail proposé l'incitait à cela.

2. Force est de constater que, pour chacun des deux élèves, l'usage d'un instrument conduit à l'échec.

L'élève 1 parce que cet usage a anesthésié sa capacité de réflexion.

L'élève 2 parce qu'il a considéré comme « insurmontable » l'étude exacte du signe de l'expression $\cos^2 x - \sin^2 x$ et a préféré une résolution numérique approchée. Dans son cas, une calculatrice formelle lui aurait donné la solution exacte, mais n'aurait pas révélé cette lacune importante de ses connaissances.

À un moment donné, il faut savoir laisser les instruments de côté et réfléchir par soi-même. Peut-être est-ce la moralité de ce sujet ?

Et voici le sujet 2013 ...

ESD 2013 –15 : Optimisation

1. Le sujet

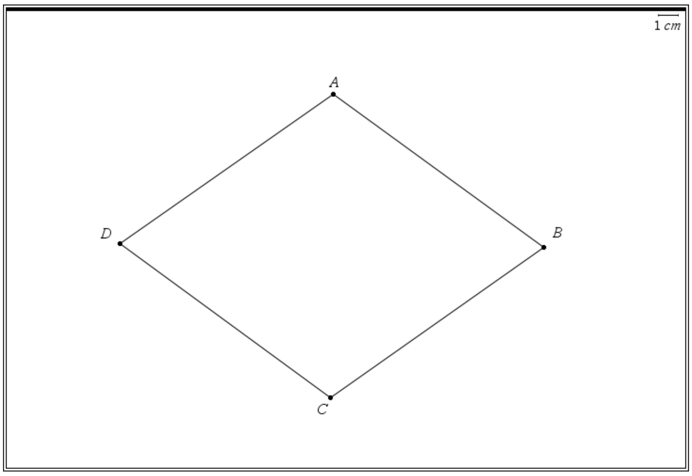
A. L'exercice proposé au candidat

A. L'exercice du professeur

Un losange *ABCD* a pour périmètre *p*.
Quelle forme doit-il avoir pour que son aire soit la plus grande possible ?

Pour les plus rapides, essayez de démontrer le résultat conjecturé en posant par exemple

$\alpha = B\hat{A}C$



B. L'extrait d'un manuel

1. *f* est la fonction telle que $f(x)_{gj2014} = x\sqrt{\frac{p^2}{4} - x^2}$, où *p* est un réel strictement positif.

1.1. Vérifier que *f* est définie sur $\left[-\frac{p}{2} \,;\, \frac{p}{2}\right]$

1.2. Étudier le sens de variation de *f* et démontrer que *f* admet un maximum pour $x = \frac{p\sqrt{2}}{2}$

2. On s'intéresse à tous les losanges de périmètre donné *p*. On appelle *x* la longueur d'une diagonale.
2.1. Exprimer l'aire de ces losanges en fonction de *p* et de *x*.
2.2. En utilisant la question 1, déterminer parmi tous ces losanges, celui qui a l'aire maximale. Quelle est sa nature ?
Bordas Terminale S 2012, collection Indice

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les compétences développées chez les élèves par les deux versions de l'exercice.

2. Proposez une correction de l'exercice du professeur telle que vous la présenteriez devant une classe de terminale scientifique.

3. Présentez deux ou trois exercices sur le thème *optimisation* à des niveaux de classe différents et dont l'un au moins nécessite la mise en œuvre d'un logiciel de géométrie dynamique.

2. Eléments de correction

1. Chacun aura reconnu la même situation que dans le sujet précédent. Voici cette situation abordée de deux manières très différentes.

L'exercice professeur.
Son énoncé interpelle puisque la démonstration de la « conjecture » semble être réservée « aux plus rapides ». C'est donc que les élèves avaient probablement à leur disposition un logiciel de géométrie dynamique, et que le travail demandé consistait à mener des investigations à l'aide du logiciel.
Les compétences visées par cet exercice sont :

- Savoir modéliser une situation géométrique en utilisant un logiciel (= savoir construire une figure dynamique rendant compte de la situation)
- Observer, expérimenter en utilisant éventuellement des outils logiciels, savoir émettre une conjecture

Pour « les plus rapides », il s'agira en plus de conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture.

L'exercice du manuel.
Cet exercice a pour objectif l'étude d'une fonction avec radical et dépendant un paramètre. Cette fonction est ensuite contextualisée. Il y a donc deux phases distinctes dans cet exercice.
Dans une première phase, la compétence visée est de savoir exercer l'intelligence du calcul (précisément apprendre à étudier une fonction avec radical). La fonction f est un objet d'étude.
Dans une deuxième phase, les élèves doivent *reconnaître* dans cette fonction la fonction-objectif issue d'une modélisation. La fonction f devient un outil d'étude.
La modélisation de la situation géométrique proposée n'est de ce fait pas à leur charge. La compétence « traduire en langage mathématique une situation réelle » n'est pas visée, c'est l'énoncé qui effectue cette traduction de manière guidée. Cet exercice est en effet assez représentatif d'un type courant d'exercices d'évaluation, où le professeur cherche à évaluer la capacité des élèves à exécuter certaines tâches (étudier une fonction, déterminer un extremum, suivre une démarche guidée, contextualiser un résultat).
Il en irait autrement si les deux questions étaient inversées, ce qui serait souhaitable pour motiver l'étude des variations de la fonction f, qui serait définie sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{p}{2}\right]_{\mathit{gilbertjulia}2014}$.

2. On suppose qu'une phase d'investigation utilisant un logiciel de géométrie dynamique a été prévue.

- Faire expliciter un programme de construction de la figure. (On vérifie si les dans les figures faites par les élèves la propriété « losange de périmètre de donné » résiste à la déformation).
- Recenser les conjectures. Vu la question posée portant sur la « forme » du losange, il s'agit d'un autre secret de Polichinelle.
- Cependant, il ne s'agit pour l'instant que d'une conjecture qu'il faut justifier, ce qui amène à un traitement mathématique. Pour cela il s'agit de choisir un paramètre permettant de décrire la situation puis d'exprimer l'aire du losange en fonction de ce paramètre et enfin de déterminer le maximum de la fonction aire.
- On peut comparer les possibilités de choix de paramètre : un angle, comme le suggère l'énoncé ou la longueur d'une diagonale comme dans l'exercice manuel. La comparaison tournera certainement en faveur de la suggestion de l'énoncé.

3. Commentaires

Cet exercice peut à la rigueur avoir un rôle de « mise en situation » avant d'aborder un problème d'optimisation géométrique plus consistant. L'intérêt mathématique en est limité. Le tracé de la hauteur issue de A du triangle ABC répond en effet à la question sans nécessiter de modélisation.