# ESD 2014E –02 : Probabilités

## 1. Le sujet

### A. L'exercice proposé au candidat

Dans une fête foraine, un jeu de hasard est proposé aux visiteurs.
Pour chaque partie, la participation est de 5 euros.
Une partie consiste à lancer un dé à six faces, numérotées de 1 à 6. Pour un résultat supérieur ou égal à 5, le joueur reçoit 15 euros, sinon il ne reçoit rien.

1. L'organisateur espère qu'il y aura au moins 1000 parties de jouées. Peut-on penser qu'il gagnera de l'argent ?

2. À la fin de la journée, l'organisateur fait ses comptes : il constate que 2000 parties ont été jouées et il a amassé 2650 euros de gain.
2.1. Combien de parties ont-elles été gagnées par les joueurs ?
2.2. Peut-on considérer que le dé est équilibré ?

### B. Les réponses proposées par trois élèves de première S à la question 1

*Élève 1*
*Je suppose qu'il y a exactement 1000 parties jouées, et je nomme X le nombre de parties gagnées par les joueurs. X suit la loi binomiale* $B\left(1000\ ;\ \frac{1}{3}\right)$. *D'après la calculatrice,* $P(X \leq 500) \approx 1$
*On est à peu près sûr que plus de la moitié des parties seront perdues par les joueurs. L'organisateur devrait donc gagner de l'argent.*

*Élève 2*
*Avec un tableur, j'ai réalisé une simulation de 1000 parties. J'ai obtenu 345 parties gagnées.*
$\frac{345 \times 10 - 655 \times 5}{1000} = 0{,}175$. *En moyenne, je trouve un gain de 0,17 euro par partie pour le joueur.*
*L'organisateur ne va donc pas gagner d'argent.*

*Élève 3*
*Je suppose qu'il y a exactement 1000 parties jouées. La probabilité de gagner est de* $\frac{1}{3}$.
*On a donc environ* $\frac{1}{3} \times 1000$ *parties de gagnées. L'organisateur devrait gagner :*
$1000 \times 5 - \frac{1}{3} \times 1000 \times 15 = 0$

### C. Le travail à exposer devant le jury

**1.** Analysez la réponse des trois élèves en mettant en évidence leurs compétences dans le domaine des probabilités.

**2.** Proposez une correction de la deuxième question telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.

**3.** Présentez deux ou trois exercices sur le thème probabilités, dont l'un au moins s'appuiera sur une simulation.

## 2. Eléments de correction

L'exercice propose aux élèves une situation anormale : comment le « forain » fictif en question dans l'exercice peut-il amasser une recette substantielle alors que le jeu proposé est *a priori* équitable ? Il a pour objectif principal de mettre en place ou de réinvestir des outils pertinents permettant de donner du sens à la notion d'écart significatif entre l'observation et la prévision.

La façon dont est construit cet exercice, malgré un habillage (volontairement ?) très rudimentaire, est intéressante.
L'énoncé ne livre pas aux élèves une information capitale, les caractéristiques du dé avec lequel le jeu se déroule. Dans la première question, les élèves vont donc faire un choix « par défaut » et ajouter à l'énoncé une hypothèse supplémentaire : ils vont supposer que le dé est équilibré. Dans ce cas, le jeu est équitable, et le forain philanthrope ne peut espérer gagner significativement de l'argent.

Il y a évidemment un « lézard », qui apparaît dans la question 2 : un gain qui paraît anormalement élevé. L'exercice livre la clef de la situation étudiée, en mettant explicitement en cause dans la question 2.2 l'équilibrage du dé. Dans une séance de travaux dirigés, on pourrait même envisager de déléguer aux élèves cette mise en cause, en leur proposant de trouver une explication plausible au gain anormal du forain. C'est bien cette question 2 qui est la question majeure de l'exercice.

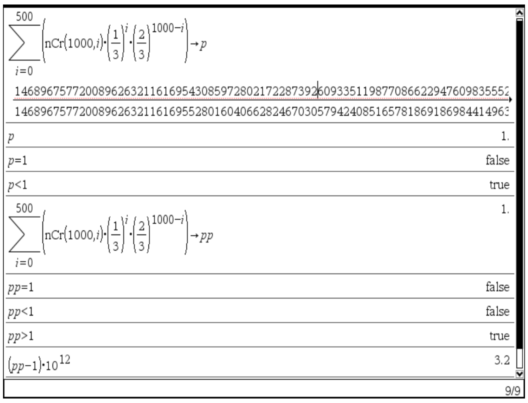
**1**. Si on fait la synthèse des productions des élèves 2 et 3, on obtient une correction complète de la première question. L'élève 2 construit une simulation montrant que dans certains cas l'organisateur peut perdre de l'argent et l'élève 3 fournit une explication en calculant une espérance mathématique.

*Elève 1.* Cet élève sait :

- Traduire en langage mathématique une situation réelle à l'aide d'une loi de probabilité (il reconnaît et utilise à bon escient une loi binomiale).
- Organiser et effectuer un calcul complexe (une somme de termes indexés) à l'aide de sa calculatrice.
- Il conserve une attitude critique à propos du résultat affiché. Sa calculatrice a probablement renvoyé « 1 », mais cet élève n'utilise pas le symbole =, il utilise le symbole ≈, ce qui montre qu'il a conscience d'un écart entre la valeur affichée et la valeur exacte.

Cet élève a cependant une représentation incorrecte de la situation. Selon lui, l'organisateur gagne de l'argent s'il y a plus de parties perdues que de parties gagnées, indépendamment des mises et des gains. Sa solution est incorrecte.

À propos du calcul de $P(X \leq 500)_{gj2014}$, qui a probablement été organisé et effectué de façon correcte par l'élève 1, on peut noter suivant le mode de calcul choisi sur *n*Spire, une aberration.




Ci-contre, les calculs ont d'abord été faits en mode « Exact » et le résultat stocké dans la variable **p** (on a affiché la valeur exacte puis l'arrondi automatique de **p** obtenu par la touche Ctrl). On note une différence entre numérateur et dénominateur de la valeur exacte à partir du 28$^{\text{ème}}$ chiffre, le chiffre du dénominateur étant logiquement supérieur (d'une unité) à celui du numérateur. La valeur de **p** est bien reconnue comme étant < 1.

En revanche, lorsqu'on effectue ensuite les calculs en mode « Approché » (variable **pp**), la gestion des arrondis n'est pas la même, l'arrondi impacte chacun des termes de la somme et non pas le résultat de l'addition, l'approximation perd en qualité.

Au point que la variable **pp**, qui est censée représenter le même nombre que **p**, est maintenant reconnue, de façon aberrante, comme étant > 1.

*Elève 2.* Cet élève sait :

- Utiliser, comprendre, élaborer une simulation numérique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel.

Cet élève manque cependant d'une attitude critique en ne relativisant pas le résultat de sa simulation. Cette simulation montre certes que l'organisateur « peut perdre » de l'argent, mais en perd-il « toujours » ou bien « parfois »et dans quelle mesure ?
Sa réponse est incomplète. Elle illustre la première question mais ne la résout pas.

*Elève 3.* Cet élève sait :

- Extraire, organiser et traiter l'information utile, s'engager dans une démarche, particulariser une situation.
- Traduire en langage mathématique une situation réelle.

Il calcule correctement l'espérance mathématique de la variable aléatoire « gain obtenu en jouant 1000 parties ».
Son résultat est correct et exploitable, à condition de développer une argumentation mathématique sur sa signification.

**2.** Dans un premier temps, on fait calculer le nombre de parties gagnées (490 parties gagnées) puis leur fréquence (0,245).
Cette fréquence est nettement plus petite que la probabilité théorique de gagner une partie dans l'hypothèse où le dé est équilibré.

La question est de savoir si cette fréquence est « anormalement basse », au point de mettre en cause l'hypothèse d'équilibrage du dé, ou bien si cette valeur peut être attribuée à une fluctuation naturelle autour de la valeur de référence.

Voici l'occasion de parler « d'intervalle de fluctuation » autour de la probabilité de gain *supposée* égale à $\frac{1}{3}$, sous l'hypothèse que le dé est équilibré.

Deux méthodes permettent de déterminer un tel intervalle de fluctuation autour de la probabilité théorique de la fréquence de gain *f* pour 2000 parties jouées.

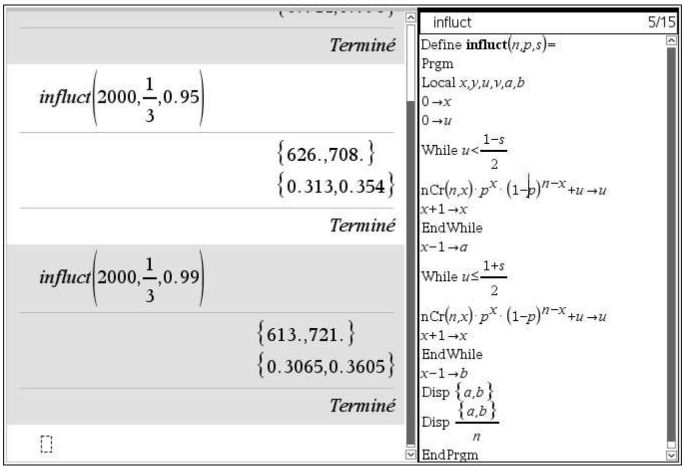
En classe de seconde : dans au moins 95% des cas, *f* appartient à l'intervalle : $\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{2000}}\ {}_{gj2014}\ ;\ \frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{2000}}\right]$, intervalle inclus dans $[0{,}310\ ;\ 0{,}356]$.

En classe de première S : L'intervalle de fluctuation à 95 % est l'intervalle $[a\ ;\ b]$ tel que *a* est le plus petit entier vérifiant $P([X \leq a]) > 0{,}025$ et *b* est le plus petit entier vérifiant $P([X \leq b]) \geq 0{,}975$.

On peut à ce moment valoriser la production de l'élève 1 qui de toute évidence sait calculer des probabilités liées à la loi binomiale en lui demandant comment on pourrait obtenir les valeurs de *a* et de *b*.

Le programme **influct** (voir sujet ESD2013_02) donne comme intervalle de fluctuation du nombre de parties gagnées l'intervalle $[626\ ;\ 708]$ et comme intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence de gain l'intervalle $[0{,}313\ ;\ 0{,}354]$

(L'écran ci-contre propose aussi pour information les intervalles de fluctuation à 99 % du nombre de gains et de la fréquence)




Quelle que soit l'option choisie, la fréquence observée est largement en dehors de l'intervalle de fluctuation. Au risque 5 %, l'hypothèse que le dé est équilibré peut être rejetée. (Elle l'est aussi au risque 1 % comme le montre l'écran ci-dessus).

## 3. Conclusion et commentaire

**1.** Le dé étant maintenant reconnu comme non équilibré, on ne connaît pas la probabilité *p* de gagner avec ce dé. Voici l'occasion de faire la distinction entre intervalle de fluctuation et intervalle de confiance.

Dans l'étude de la situation, on a supposé le dé équilibré, la probabilité de gain était supposée égale à $\frac{1}{3}$. Les fréquences de gains doivent en principe fluctuer autour de cette valeur.

Cette hypothèse étant rejetée, on est amené à retourner le raisonnement (et à poser la question aux élèves) : Peut-on estimer la probabilité *p* de gagner en jouant avec ce dé sachant que sur 2000 parties la fréquence de gain observée est 0,245 ?

La probabilité que *p* appartienne à l''intervalle $\left[0{,}245-\frac{1}{\sqrt{2000}}\ ;\ 0{,}245+\frac{1}{\sqrt{2000}}\right]$ inclus dans $\left[0{,}222_{\ gj2014}\ ;\ 0{,}268\right]$, est supérieure ou égale à 0,95. Au seuil de confiance 95 %, on peut affirmer que $0{,}222 \leq p \leq 0{,}268$

**2.** La situation étudiée ici rappelle étrangement le jeu du bonneteau où il s'agit de découvrir la dame de cœur parmi trois cartes (les deux autres cartes sont souvent les rois de pique et de trèfle) manipulées par le bonneteur devant les badauds qui essaient de suivre les mouvements des cartes. Apparemment, il y a aussi une chance sur trois de découvrir où se trouve la dame de cœur.

Il y a cependant une différence fondamentale entre les deux jeux.

Si l'on s'en tient aux règles définies dans l'énoncé, le jeu qui nous est présenté nécessite un dé. Certes, le dé est pipé (il faut bien que le forain soit rémunéré …), mais le résultat du lancer de ce dé dépend quand même du hasard (en supposant bien entendu que l'organisateur n'a aucune influence sur le résultat). Il s'agit bien là d'une expérience aléatoire. Le calcul des probabilités est pertinent pour aborder cette situation.

Au contraire, dans le jeu du bonneteau, le résultat dépend uniquement du bon vouloir du bonneteur, lequel fait gagner provisoirement le badaud crédule et le fait perdre ensuite au moment propice pour lui soutirer plus d'argent. Le hasard n'y a aucune place et le badaud pigeonné n'a au bout du compte aucune chance de gagner. Ce jeu n'a rien d'aléatoire et tout calcul de probabilités serait hors de propos.

# ESD 2014E –13 : Fluctuation d'échantillonnage

## 1. Le sujet

### A. L'exercice proposé au candidat

Le pôle recherche d'une entreprise a recruté ces trois dernières années soixante-quinze personnes. Vingt d'entre elles sont des femmes. Sachant que dans le secteur concerné 37 % des diplômés sont des femmes, un responsable syndical souligne la sous-représentation des femmes au sein du pôle recherche.
Quels arguments mathématiques peuvent appuyer ou bien remettre en cause son affirmation ?

### B. Les réponses proposées par deux élèves de seconde

*Élève 1*
*La proportion de femmes recrutées dans le pôle est de* $20/75 \approx 0{,}27$*, soit 27 %, ce qui est nettement insuffisant par rapport aux 37 % de diplômés. Le syndicaliste a raison, c'est le problème dont ils ont parlé hier aux infos.*

*Élève 2*
*Je peux appliquer les résultats sur la fluctuation avec* $n = 75$ ; $p = 0{,}37$. *D'après ma calculatrice, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est* $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = [0{,}25\ ;\ 0{,}49]$. *On est dans l'intervalle, il n'y a pas de discrimination.*

### C. Le travail à exposer devant le jury

**1.** Commentez le travail de chacun des deux élèves en mettant en évidence leurs acquis et leurs erreurs éventuelles.

**2.** Proposez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première scientifique.

**3.** Présentez deux ou trois exercices sur le thème *fluctuation d'échantillonnage*, dont l'un au moins fait appel à l'utilisation d'un logiciel.

## 2. Eléments de correction

L'exercice propose une application de la fluctuation d'échantillonnage concrète et tirée de l'actualité comme le souligne l'élève 1.
On peut éventuellement attribuer comme objectif à cet exercice une réflexion sur les divers types d'intervalle de fluctuation en usage (même si un seul d'entre eux est au programme).

**1**. *Elève 1.*
*Ses acquis :*
Cet élève sait s'engager dans une démarche : celle-ci consiste à calculer la proportion de femmes dans l'entreprise et à comparer empiriquement cette proportion à la proportion de femmes parmi les diplômés. Pour mener à bien ce calcul, il a su extraire et traiter l'information utile.
*Ses erreurs :*
Cet élève n'a pas compris le sens de la question, en particulier ce que le professeur attendait comme « arguments mathématiques ». Sa conclusion de « nette insuffisante » est purement subjective, elle traduit une opinion et non un argument basé sur un critère de décision. On peut penser que cet élève a été influencé par l'actualité (« on dit que les femmes sont sous représentées parmi les cadres, voici un cas évident »)
La réponse de cet élève n'est pas recevable.

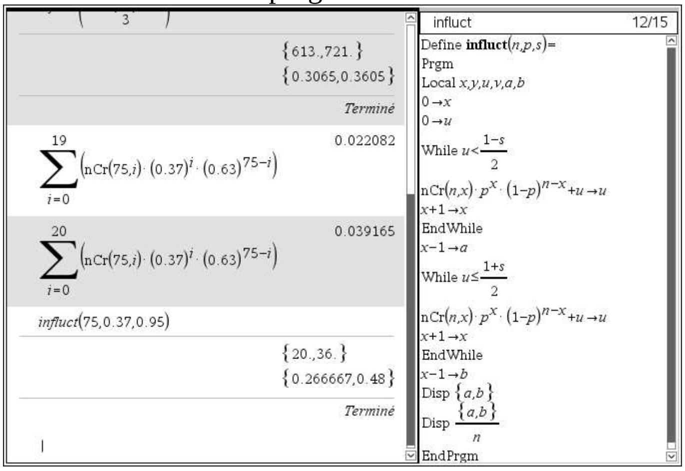
*Elève 1.*
*Ses acquis :*
Cet élève a identifié le sens du problème et a su choisir et utiliser à bon escient l'outil mathématique adéquat. Il sait déterminer correctement un intervalle de fluctuation (le sens de ses arrondis le prouve : $0{,}37-\frac{1}{\sqrt{75}}$ est arrondi par défaut et $0{,}37+\frac{1}{\sqrt{75}}_{gj2014}$ par excès, l'intervalle $\left[0{,}37-\frac{1}{\sqrt{75}}\ ;\ 0{,}37+\frac{1}{\sqrt{75}}\right]$ est bien inclus dans $[0{,}25\ ;\ 0{,}49]$). Il a probablement calculé au préalable le rapport $\frac{20}{75}$ dont il ne fait pas mention explicitement.

*Ses erreurs :*
Cet élève n'a pas perçu les limites de la notion de fluctuation. Selon lui, le fait que la proportion de femmes parmi les recrutés (qu'il aurait dû mentionner explicitement) soit dans l'intervalle prouve la non discrimination.
Il confond la conclusion correcte :
« *f* est dans l'intervalle de fluctuation donc on ne peut pas affirmer qu'il y a discrimination »
avec la conclusion incorrecte qui est la sienne :
« *f* est dans l'intervalle de fluctuation donc on peut affirmer qu'il n'y a pas discrimination »
(En d'autres termes, cet élève n'a pas pris conscience du risque de deuxième espèce : accepter l'hypothèse nulle alors que celle-ci est fausse ; un résultat non contradictoire avec l'hypothèse nulle ne prouve pas que cette hypothèse est vraie).

La démarche de cet élève est correcte, seule sa conclusion est à rectifier.

**2.** Tout d'abord une correction de l'exercice au niveau seconde :
*Argument pour :* « Il faudrait 28 chercheuses parmi les 75 nouveaux recrutés pour respecter le pourcentage de femmes parmi les diplômés, il y a un déficit de 8 chercheuses ».
*Argument contre* : « On peut appliquer les résultats sur la fluctuation avec $n=75$ ; $p=0{,}37$. L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=[0{,}25\ ;\ 0{,}49]$. La proportion $\frac{20}{75}$ de femmes parmi les recrutés appartient à cet intervalle. Les données dont on dispose ne permettent pas d'affirmer qu'il y a sous-représentation ».

Puis une correction au niveau première S en se conformant strictement au programme :




Au niveau première scientifique on est amené à construire un intervalle de fluctuation à partir de la loi binomiale.
L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % du nombre de recrutés est l'intervalle $\left[20_{gj\,2014}\;;\;36\right]$. La valeur observée est une extrémité de cet intervalle.

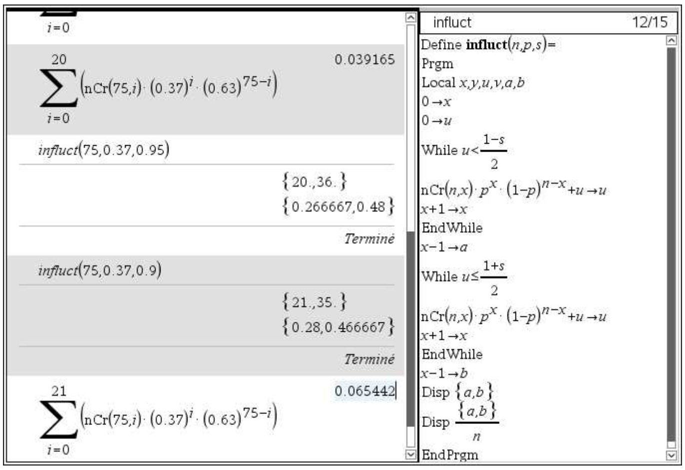
Au seuil de risque 5 %, les données dont on dispose ne permettent pas d'affirmer qu'il y a sous-représentation.

## 3. Commentaire

Le programme de première scientifique prévoit « *d'exploiter l'intervalle de fluctuation à un seuil donné, déterminé à l'aide de la loi binomiale pour rejeter ou non une hypothèse sur une proportion* » et se limite aux intervalles de fluctuation bilatéraux. Je me suis conformé strictement au programme dans la correction ci-dessus. En tout état de cause, cette correction n'est pas satisfaisante.

En effet, le programme impose que l'alternative à l'hypothèse « il n'y a pas de discrimination relative au sexe au niveau du recrutement » soit : « la proportion des femmes recrutées par l'entreprise *est différente* de la proportion de femmes parmi les diplômés » (c'est-à-dire qu'on envisage que cette proportion puisse être aussi bien significativement plus petite que significativement plus grande). C'est le choix d'une telle hypothèse alternative qui conduit à construire un intervalle de fluctuation au seuil 95 % bilatéral conforme au programme.

Or, dans le contexte qui nous est présenté, le questionnement est tout autre. L'hypothèse alternative est que « la proportion des femmes recrutées par l'entreprise est *plus petite* que la proportion de femmes parmi les diplômés » (cette à dire qu'on envisage que cette proportion puisse être significativement plus petite mais certainement pas plus grande). Ce questionnement, plus pertinent ici, amène à construire un intervalle de fluctuation au seuil 95 % unilatéral, c'est-à-dire un intervalle de la forme $[a\;;\;75]$ où $a$ est le plus petit entier vérifiant $P([X\le a])>0{,}05$.




L'écran ci-contre que dans ce cas : $a=21$, l'intervalle de fluctuation unilatéral est l'intervalle $[21\;;\;75]$.

La conclusion n'est pas la même. Au seuil de risque 5 %, on peut affirmer qu'il y a bien une sous-représentation des femmes au sein du groupe recherche.

Cet exercice se prête très bien à faire percevoir la différence qu'il y a entre un test bilatéral et un test unilatéral en montrant d'une part que ce choix dépend des hypothèses antagonistes choisies et d'autre part que, suivant le type de test utilisé, la conclusion peut être différente. Il me semble que le professeur qui a posé cet exercice ne peut pas se dispenser d'un tel prolongement. Ce professeur peut faire remarquer que le résultat : $_{gj2014}\quad \sum_{i=0}^{i=20} \binom{n}{i} 0{,}37^{i} ;0;63^{n-i} = 0{,}039$ à $10^{-3}$ près mérite réflexion. Il représente la probabilité qu'il y ait au plus 20 femmes dans un échantillon de 75 diplômés représentatif du point de vue de la répartition hommes-femmes. Cette probabilité est plus grande que 0,025 (seuil inférieur du test bilatéral) mais plus petite que 0,05 (seuil du test unilatéral).

Un document[1] d'accompagnement de l'inspection générale souligne : « *Dans une démarche de prise de décision, il est nécessaire de clarifier en premier lieu le choix des hypothèses pour formaliser un questionnement qui, lui-même, dépend des préoccupations du décideur liées aux enjeux (économiques, sociaux, sanitaires, politiques, ...) de la situation. Le seuil devra également être défini en amont de la mise en forme mathématique. Ce choix des hypothèses déterminera ensuite la forme de l'intervalle de fluctuation à utiliser. Il est donc nécessaire de veiller à ce que la forme de l'intervalle de fluctuation utilisé soit toujours en cohérence avec le questionnement naturellement induit par la situation concrète, même si pour des raisons pédagogiques on se limite en classe aux intervalles de fluctuation bilatéraux.* »
On ne saurait être plus clair …

Pour cette raison, l'exercice proposé par le jury me paraît non-conforme au programme[2] car la situation qu'il met en scène crée manifestement un conflit entre les outils qu'un strict respect du programme permet et ceux qui seraient en cohérence avec le contexte.

Il appartient au candidat de se faire sa propre opinion.

---

[1] « Ressources pour la classe de première générale et technologique, statistiques et probabilités » page 70, document de juin 2011 mis en ligne sur le site eduscol/education.fr (source Ministère de l'éducation nationale, de la jeunesse et de la vie associative DGESCO Mathématiques )

[2] Il s'agit d'un cas de récidive car, en 2013, un exercice semblable avait été proposé.