ESD 2013 –3c04 : Intégration

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

1. Déterminer les primitives sur R de la fonction *f* définie par : $f(x) = 2\sin x.\cos x$

2. En déduire la valeur du réel *I* défini par : $I = \int_0^{\pi} (\sin x + \cos x)^2 \, \mathbf{d}x$

3. On considère les réels $K = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, \mathbf{d}x$ et $L = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, \mathbf{d}x$

3.1. Calculer $K + L$ et $K - L$.
3.2. En déduire les valeurs de *K* et *L*.

B. Les réponses proposées par trois élèves à la question 1.

Élève 1

La primitive de sin *est* −cos *et la primitive de* cos *est* sin, *donc la primitive de f est*

$$F(x) = -2\cos(x)\sin(x)$$

Élève 2

Soit u la fonction cosinus, sa dérivée est moins la fonction sinus ; je reconnais la formule uu' donc les primitives de f sur $\mathbb{R}$ *sont :*

$$F(x) = \sin^2(x) + k$$

Élève 3

On a $f(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$, *donc les primitives de f sont les fonctions F définies par :*

$$F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + k \qquad (k \in \mathbb{R})$$

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez la production de chaque élève, en mettant en valeur ses connaissances dans le domaine du calcul intégral.

2. Proposez une correction de la question 3 telle que vous la présenteriez devant une classe de terminale scientifique.

3. Proposez deux ou trois exercices sur le thème **intégration** dont au moins un nécessitera la mise en œuvre d'un algorithme

2. Eléments de correction

L'exercice est un exercice classique sur l'intégration qui mobilise les propriétés de linéarité de l'intégrale. Il montre comment il est parfois plus facile de calculer des combinaisons linéaires adéquates (souvent la somme et la différence) de deux intégrales, plutôt que de calculer séparément chacune d'entre elles. Le voici présenté sous une forme très guidée, chaque question préparant la suivante.

1. Analyse des travaux d'élèves.

Elève 1.
Réponse incorrecte.
Réussites :
Cet élève connaît le « tableau des primitives usuelles », du moins une primitive de chacune des fonctions sinus et cosinus. Il sait que, si F est une primitive de f, alors pour tout réel k, la fonction kF est une primitive de la fonction kf.
Echecs :
Il utilise un « théorème en acte » qui pourrait s'énoncer ainsi : « Un produit de fonctions a pour primitive le produit de leurs primitives ».
Il ne fait pas la distinction entre « une primitive de … » ; « la primitive de … qui prend la valeur … en … » et « l'ensemble des primitives de … ». Selon lui, il semble qu'une fonction donnée admet une seule primitive.

Elève 2.
Réponse incorrecte.
Réussites :
Cet élève connaît une primitive de la fonction sinus et le « tableau à rebours des opérations sur les dérivées » (en l'occurrence la dérivée du carré d'une fonction). Il sait reconnaître, dans un produit de fonctions, qu'un facteur est la fonction dérivée d'un autre.
Il sait que les primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante (il fait la distinction que l'élève 1 ne fait pas).

Echecs :
Une erreur de signe.
Son exposé manque de précision « je reconnais la formule *uu'* » ne veut rien dire. On pourrait lui demander d'être plus précis et d'expliciter quelle est sa « formule » complète. En lui faisant faire l'inventaire des fonctions qu'il « reconnaît », peut-être qu'il pourrait détecter lui-même son erreur de signe.

Elève 3.
Réponse correcte.
Cet élève utilise à bon escient une linéarisation. Sa démarche est pertinente.

Il serait possible d'exploiter les démarches des élèves 2 (corrigée) et 3 pour aider l'élève 1 à se rendre compte qu'une fonction n'a pas qu'une seule primitive. L'élève 2 utilise à rebours la formule de dérivation d'un carré. Il aboutit à la conclusion (corrigée) que la fonction $x \mapsto -\sin^2 x_{\textit{gjulia}\,2014}$ est une primitive de f. L'élève 3 utilise une linéarisation et aboutit à la conclusion que la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\cos 2x$ est une primitive de f. Pourquoi deux fonctions différentes peuvent-elles être toutes deux primitives de f ?

2. Correction de la question 3.

Il s'agit de mettre en concurrence les quatre intégrales K, L, $K+L=\int_0^{\pi}\cos^2 x\,\mathbf{d}x+\int_0^{\pi}\sin^2 x\,\mathbf{d}x$ et $K-L=\int_0^{\pi}\cos^2 x\,\mathbf{d}x-\int_0^{\pi}\sin^2 x\,\mathbf{d}x$.

On peut interpeler les élèves : « Pourquoi l'énoncé demande-t-il de calculer $K+L$ et $K-L$ plutôt que K et L eux-mêmes ? »

Faire rappeler la propriété d'additivité des intégrales pour amener au fait que $K+L$ et $K-L$ peuvent s'exprimer autrement : $K+L=\int_0^\pi\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\mathbf{d}x$ et $K-L_{gj2014}=\int_0^\pi\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\mathbf{d}x$.
Les fonctions obtenues sous le signe intégrale sont plus faciles à intégrer que les fonctions $\cos^2$ et $\sin^2$ séparément. Il est par conséquent plus facile de calculer $K+L$ et $K-L$ plutôt que K et L séparément.

En conclusion, on fait remarquer que « dans certains cas », on a intérêt à calculer des combinaisons linéaires simples de deux intégrales associées plutôt qu'une de ces intégrales isolée.
On peut aussi faire noter une primitive de chacune des fonctions $\cos^2$ et $\sin^2$ (sans pour autant que les élèves aient à les retenir) en faisant remarquer qu'il y a dans l'expression d'une primitive de ces fonctions des termes non trigonométriques : une fonction trigonométrique n'a pas nécessairement de primitive exclusivement trigonométrique.

En classe de terminale scientifique, Poser la question « pourrait-on s'y prendre autrement pour calculer K ou L séparément ? » dans l'espoir que la méthode développée dans l'exercice soit comparée à une autre méthode, par exemple avec une intégration par parties.

3. Voir REDCM pages 159 à 172. Pour un exercice nécessitant la mise en œuvre d'un algorithme, on peut penser à l'étude d'une suite d'intégrales, ou, aussi bien, à une méthode de calcul approché d'une intégrale (rectangles, trapèzes, ….).