ESD 2013 –c302 : Fonctions

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

On définit sur R les fonctions f et g par $f(x)=\mathbf{e}^{x+1}$ et $g(x)=\mathbf{e}^{\frac{1-x^2}{2}}$

Dans un repère orthonormé, on considère C et C′ les courbes respectives des fonctions f et g, et le point $A(-1\,;1)$.

1. Démontrer que les deux courbes admettent la même tangente au point A, que l'on notera Δ.

2. Étudier la position relative de la courbe C et de la droite Δ.

3. Étudier la position relative de la courbe C′ et de la droite Δ.

B. Des solutions proposées par trois élèves de Terminale scientifique

Élève 1

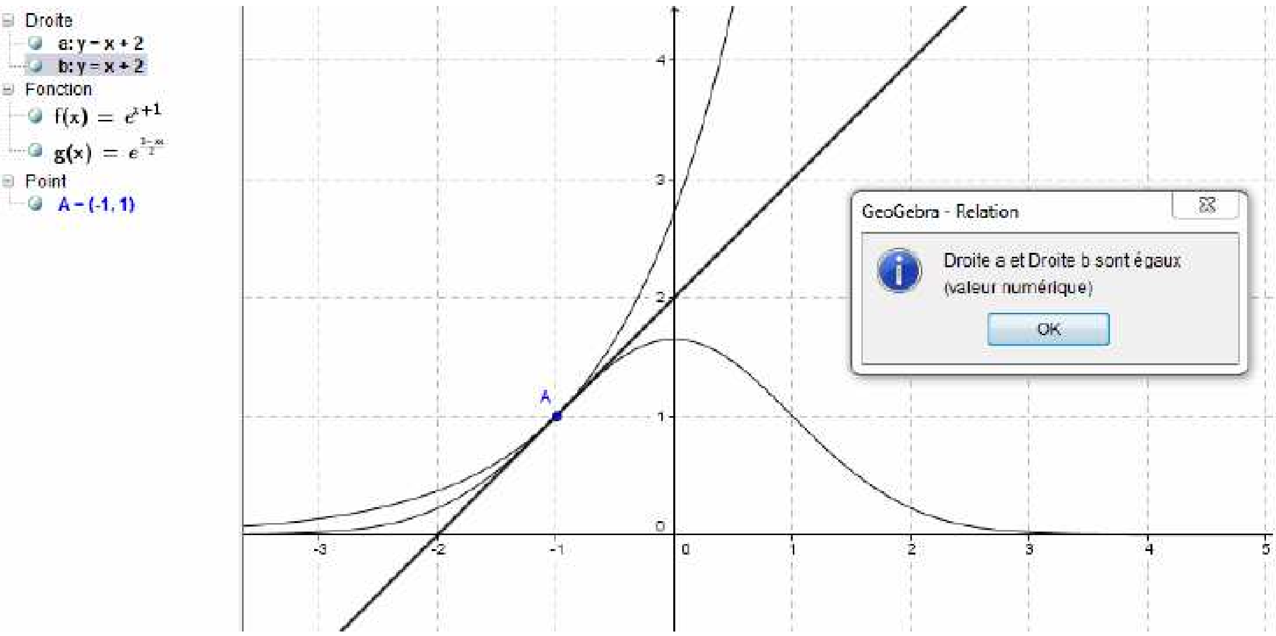
1. $f(-1)=g(-1)=1$ *donc les courbes passent par le même point. CQFD*

Élève 2

2. $f(-1)=1$ *donc comme la fonction est croissante, elle reste au dessus de Δ.*

Élève 3

1. *J'ai tracé les deux courbes avec le logiciel, et j'ai fait tracer les deux tangentes : elles sont égales, cela est confirmé par un zoom et par le logiciel.*



C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions de ces élèves, en mettant en évidence les compétences acquises dans le domaine des fonctions.

2. Exposez une résolution de la question 3 de cet exercice comme vous le feriez devant une classe de terminale scientifique.

3. Présentez deux ou trois exercices sur le thème fonctions dont l'un au moins s'appuiera sur l'utilisation d'un logiciel.

2. Eléments de correction

On peut assigner à cet exercice plusieurs objectifs :

- Préciser ce que l'on entend par « position relative » de deux courbes.
- Mettre en place d'une méthode permettant d'étudier la position relative d'une courbe et d'une droite (ou plus généralement de deux courbes).
- Savoir déterminer le signe d'une fonction en repérant ses zéros et en étudiant ses variations.
- Préciser la notion de « point d'inflexion », notion qui n'est pas un objectif du programme mais que l'on rencontre à cette occasion.

Quant au travail à exposer devant le jury, il demande, comme il est devenu habituel pour suivre la mode du moment, un « relevé de compétences acquises ».

Voilà de quoi mettre mal à l'aise, compte tenu des productions d'élèves plus que fragmentaires dont on dispose dans ce sujet.

À mon sens, une « compétence » est un ensemble de savoirs et savoir faire coordonnés permettant l'accomplissement d'un certain type de tâches. Une compétence s'entretient, se cultive et s'enrichit. Le professeur de la classe, qui mesure au quotidien l'évolution de ses élèves, est évidemment le mieux placé pour apprécier le degré d'acquisition d'une compétence après plusieurs mises à l'épreuve (considérer qu'une compétence est « acquise » signifie que cette compétence est suffisamment enrichie pour mener à bonne fin les tâches auxquelles elle s'applique). En revanche, relever dans ce sujet des « compétences acquises » à partir d'une seule phrase réponse relève de la mascarade. Une telle question, posée aux candidats dans un tel contexte, semble incompatible avec le souci d'une argumentation basée sur une preuve documentée.

Certes, cette notion de « compétences » en pédagogie présente un intérêt pour l'enseignant. À lui de viser à l'intention de ses élèves l'acquisition et l'entretien de compétences, plutôt que de viser une accumulation de connaissances non reliées entre elles. Mais sacraliser cette notion à ce niveau de systématisation me laisse perplexe.

1. Analyse des travaux d'élèves.
Elève 1.
Cet élève sait reconnaître que deux courbes passent par un même point (ce qui n'est pas une « compétence », mais un savoir).
Il utilise implicitement un théorème en acte qui pourrait s'énoncer ainsi : « Pour que deux courbes aient une tangente commune, il suffit qu'elles passent par un même point ».
Sa réponse est incorrecte.

Elève 2.
Cet élève sait probablement reconnaître une fonction croissante sans forcément avoir recours à un calcul de dérivée. Dans ce cas, on peut conjecturer un ersatz de « compétence » dans le domaine des fonctions :

« savoir déterminer le sens de variation d'une fonction par diverses méthodes ». Ceci dans l'hypothèse où cet élève a reconnu en la fonction *f* la composée de deux fonctions croissantes, ou bien a écrit : $f(x)=\mathbf{e}\times\mathbf{e}^{x}$ (mais on ne dispose d'aucune information à ce propos), et dans l'hypothèse où cet élève serait capable d'utiliser d'autres méthodes dans d'autres circonstances … Ce qui laisse tout de même beaucoup d'incertitudes …

Ce qui est certain, c'est qu'il confond la notion de croissance avec celle de convexité. Pour lui « la courbe représentative d'une fonction croissante est au dessus de ses tangentes » et (certainement) « celle d'une fonction décroissante est au dessous de ses tangentes ».
Sa réponse est donc incorrecte. Pour lui faire mettre en doute son idée, on pourrait attirer son attention sur la position par rapport à ses tangentes de la courbe représentative du logarithme népérien, par exemple.
À noter une expression à rectifier sans cependant insister outre mesure. L'élève mélange en effet l'aspect numérique concernant la fonction *f* et l'aspect graphique concernant la courbe représentative de la fonction *f*, il aurait du écrire plus correctement : « comme la fonction est croissante, *sa courbe représentative* reste au dessus de Δ » (selon lui …).

Elève 3.
Seul cet élève-là fait preuve d'une compétence manifestement acquise, « savoir utiliser à bon escient des outils logiciels ». Il maîtrise en effet l'usage d'un logiciel de représentation graphique, logiciel qu'il utilise non seulement pour représenter les deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ (donc pour expérimenter) mais aussi pour déterminer leurs tangentes en *A* et vérifier qu'elles sont identiques (donc pour calculer et valider). Sa démarche est correcte.
À noter que le logiciel indique que les deux tangentes sont égales « en valeur numérique » et non formellement. Il faudrait demander à cet élève quelle propriété des fonctions *f* et *g* (plus précisément de leurs dérivées) permet « d'être sûr » que les deux tangentes sont bien formellement égales.

2. Il est intéressant d'exploiter l'écran obtenu par l'élève 3. La courbe $\mathcal{C}$ semble être toujours au dessus de Δ, tandis que la courbe $\mathcal{C}'$ semble « traverser » cette droite. Mais on ne voit pas très bien ce qu'il se passe au voisinage du point *A*, même avec un zoom. Ces conjectures sont-elles exactes ? Comment les prouver ?

Les questions 2 et 3 de l'exercice sont liées. La démarche suivie dans la résolution la question 2 sera reprise pour la résolution de la question 3 et on fera un parallèle entre les deux résolutions pour souligner les problèmes « nouveaux » qui se présentent dans la question 3.

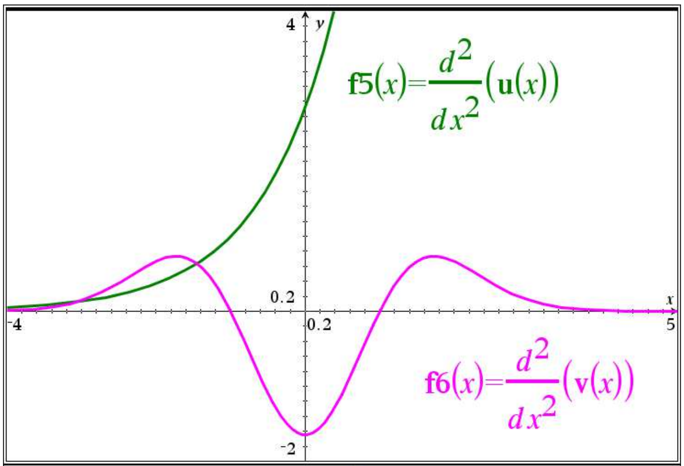
On peut considérer pour la question 2 la fonction : $u(x)=_{gj2014} f(x)-x-2$ et pour la question 3 la fonction : $v(x)=g(x)-x-2$, fonctions qui par construction s'annulent en – 1. Les positions relatives des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ par rapport à Δ dépendent du signe de ces fonctions.

Pour déterminer le signe de ces fonctions, on est amené à étudier leurs variations et pour cela à s'intéresser au signe de leur fonction dérivée. Par construction aussi, les fonctions dérivées *u'* et *v'* s'annulent en – 1.

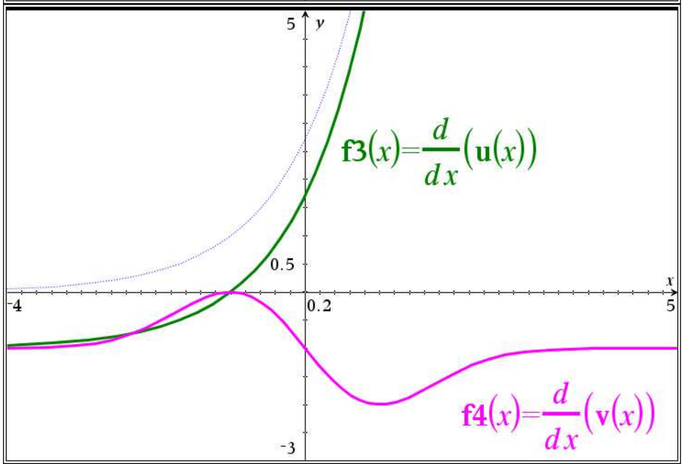
Cependant, alors que l'étude du signe de *u'* résulte facilement de la relation : $u'(x)=f(x)-1$, l'étude du signe de *v'* pose problème. En effet la relation : $v'(x)=-x.g(x)-1$ ne donne aucune information exploitable directement. C'est pourquoi on est amené à étudier à son tour les variations de cette fonction et à s'intéresser à la dérivée seconde : $v''(x)=\left(x^2-1\right)g(x)$.

Les écrans suivants illustreront graphiquement sans commentaire spécifique les propriétés de *u* et de ses dérivées en parallèle avec les propriétés de *v* et de ses dérivées.

En synthèse, on retiendra comment une étude de variations couplée avec une détermination (ou une localisation) de zéros peut permettre d'étudier le signe d'une fonction.

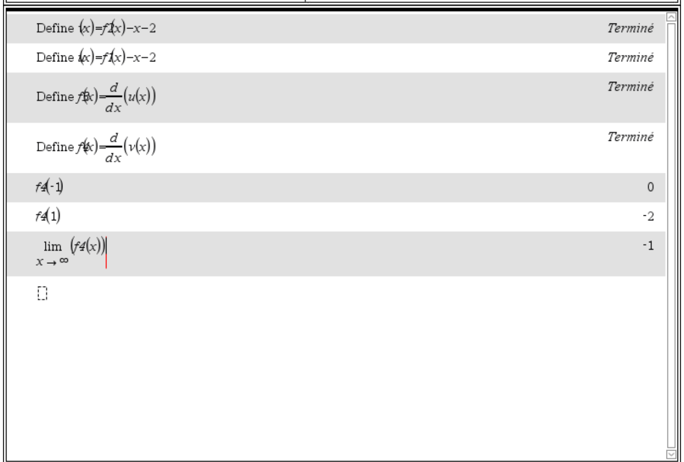


La dérivée seconde de la fonction v est du signe de $\left(x^2-1\right)_{gilbertjulia2014}$.

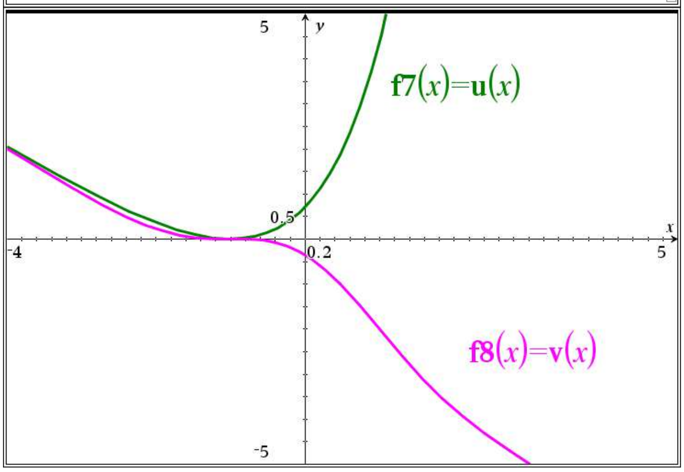


On en déduit les variations de la fonction v'. Cette fonction est décroissante sur l'intervalle $[-1\;;\;1]_{gj2014}$, croissante de part et d'autre de cet intervalle. Elle possède un maximum en – 1, qui est égal à zéro, et un minimum en 1, qui est égal à – 2.

Si on veut conclure sur le signe de cette fonction, on est amené à étudier sa limite en + ∞, ce qui permettra de savoir si zéro est valeur intermédiaire ou non.



$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(v'(x)\right)=-1$, donc la fonction v' reste strictement négative sur l'intervalle $[1\;;\;+\infty[$. La fonction v' est une fonction toujours négative, ne prenant la valeur zéro qu'en – 1.



On peut conclure maintenant sur les variations de la fonction v, elle est strictement décroissante, puis le signe de cette fonction.

Il en résulte que la courbe C' est au dessus de Δ sur l'intervalle $]-\infty\;;\;-1]$ et au dessous sur l'intervalle $[-1\;;\;+\infty[$