ESD 2013 –3c01 : Géométrie analytique

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

On souhaite planter des orangers dans un jardin qui dispose de deux fontaines. Pour simplifier l'irrigation, les orangers à planter doivent être alignés avec les deux fontaines. Pour modéliser la situation, on se place dans un repère orthonormé dans lequel les points $A(10\ ;\ 10)$ et $B(87\ ;\ 31)$ désignent les deux fontaines.

1. Un premier jardinier propose de planter un oranger au point $G(30\ ;\ 16)$. Cette proposition convient-elle ? Justifiez votre réponse.

2. Un second jardinier propose de planter autant d'orangers que possible en respectant les deux conditions suivantes :
Chaque oranger est planté sur le segment situé entre les deux fontaines.
Chaque oranger est planté sur un point dont les deux coordonnées sont entières.
Déterminez le nombre maximal d'orangers qu'il est possible de planter en respectant ces deux conditions et préciser leurs coordonnées dans le repère

B. Les réponses proposées par trois élèves à la question 1.

Élève n°1

J'ai tracé la droite (AB) sur la figure et j'ai placé le point G. Il semble aligné avec A et B mais ma figure n'est pas très précise.

Élève n°2

$AB = \sqrt{77^2 + 21^2} = 79,8$, $AG = \sqrt{20^2 + 6^2} = 20,9$ *et* $BG = \sqrt{57^2 + 15^2} = 58,9$
J'ai vérifié que $AB = AG + BG$ *donc les points* A, B, G *sont alignés.*

Élève n°3

Si A est l'origine du repère, je connais le point $B(77;21)$.
Coefficient directeur de (AB) : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{21}{77} = \dfrac{3}{11}$.
$\dfrac{3}{11} \times 30 \approx 8,2$. *On ne trouve pas 16, donc G n'est pas sur la droite (AB).*

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez la production des trois élèves en mettant en évidence les compétences acquises dans le domaine de la géométrie analytique.

2. Exposez une résolution de la question 2 de l'exercice comme vous le feriez devant une classe de seconde.

3. Présentez deux ou trois exercices sur le thème **géométrie analytique**.

2. Eléments de correction

L’exercice est un exercice avant-gardiste qui anticipe le réchauffement climatique. Planter des orangers en plein champ est pour le moment assez risqué en dehors du pourtour méditerranéen, quand on sait qu’un tel arbre gèle à – 8°C...
Il faut cependant reconnaître que le jardin en question semble bien outillé pour faire face aux sécheresses que l’on nous prédit, puisqu’il se paie le luxe rarissime de disposer de non pas une, mais deux fontaines.

1. Analyse des travaux d’élèves.

Elève 1.
Cet élève opte pour une résolution perceptive et intuitive en vérifiant sur un dessin. Il a cependant nettement conscience des carences de la solution qu’il propose, puisqu’il reconnaît lui-même que le statut de sa réponse est de l’ordre de la conjecture (« semble … »). Il éprouve le besoin de se justifier : « ma figure n’est pas très précise ». Il faudrait lui demander le fait que sa figure était « plus précise » lèverait le doute et l’inciter à trouver un moyen de conclure sans ambigüité.

Savoir faire :

- Choix probablement pertinent des unités et de l’origine du repère (de façon que les deux points A et B soient tous deux figurés).
- Sait placer dans un repère un point repéré.

« Compétences » (si tant est qu’on puisse en distinguer dans ce contexte …) :

- Formuler une conjecture.
- Critiquer lui-même sa démarche.

Elève 2.
Démarche correcte mais inaboutie car son critère de décision est peu performant dans ce contexte.

Le travail de cet élève (vérifier une relation entre trois distances) amène en effet à une difficulté « inattendue », comparer des expressions avec des racines carrées, en l’occurrence $\sqrt{6370}$ et $\sqrt{436}+\sqrt{3474}$ $_{gj2013}$.
Cet élève pense s’en sortir en raisonnant sur des valeurs approchées à 10^{-1} près des diverses distances qu’il a exprimées, et non sur leurs valeurs exactes.
Il n’a pas pris conscience qu’il n’est pas possible de justifier l’égalité de deux nombres par une égalité de certaines de leurs valeurs approchées.
L’usage d’un logiciel par exemple donne des résultats probants : $AG+GB \neq AB$ alors que ces deux nombres ont le même arrondi au dixième.

$\sqrt{77^2+21^2}$	79.8123
77^2+21^2	6370
$\sqrt{20^2+6^2}$	20.8806
20^2+6^2	436
$\sqrt{57^2+15^2}$	58.9406
57^2+15^2	3474
$\sqrt{6370}=\sqrt{436}+\sqrt{3474}$	false

Savoirs et savoir faire :

- Calculer la distance entre deux points en fonction de leurs coordonnées
- Connaître la caractérisation de l’alignement d’un point sur un segment : Etant donnés deux points distincts A et B d’un plan, un point M appartient au segment [AB] si et seulement si $AM+MB=AB$

« Compétences » :

- Reformuler un problème et s’engager dans une démarche (traduire l’alignement par une condition de distances)
- Exploiter le cadre de la géométrie analytique (pour exprimer ces distances).

Elève 3.
Cet élève propose une démarche attendue au niveau d'une classe de seconde : faire référence, d'une manière ou d'une autre, à une caractérisation analytique de la droite (*AB*), soit par une équation cartésienne, soit par un point et son coefficient directeur.
Il prend une initiative pertinente : placer en *A* l'origine du repère. En cela, il met en cause à bon escient la modélisation arbitraire proposée par l'énoncé.

Il calcule le coefficient directeur *a* de la droite (*AB*) en utilisant correctement les nouvelles coordonnées du point *B* puis il se propose d'utiliser la caractérisation suivante d'un alignement : Un point *M* appartient à la droite (*AB*) si et seulement si $Y_M = a\,X_M$ où $\left(X_M\ ;\ Y_M\right)$ sont les coordonnées de *M* dans le nouveau repère d'origine *A*. Mais son initiative comporte des risques, celui de confondre les « anciennes » coordonnées avec les « nouvelles », ce qu'il se passe à propos du point *G*. C'est la raison pour laquelle sa solution est incorrecte. Il faudrait lui demander pourquoi les coordonnées de *B* ont changé et non pas celles de *G*.

Savoirs et savoir faire :
- Effectuer un changement d'origine du repère.
- Calculer le coefficient directeur d'une droite.
- Savoir caractériser un alignement par une relation de proportionnalité entre coordonnées et coefficient directeur.

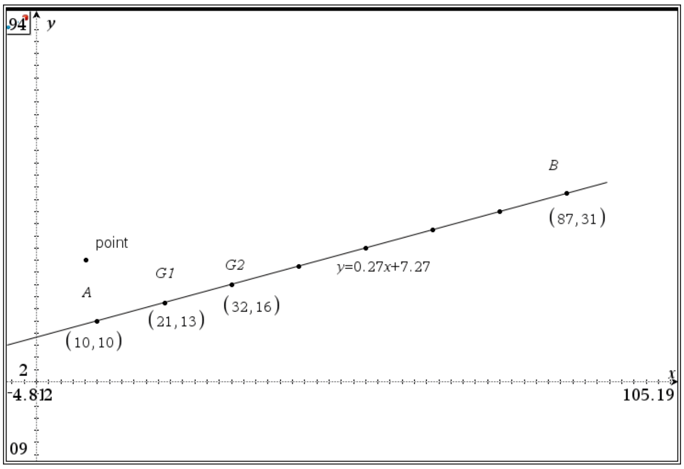
« Compétences » :
- Organiser et traiter l'information utile.
- Prendre des initiatives.
- Reformuler un problème et s'engager dans une démarche.

2. Correction de la question 2.

On peut s'appuyer sur le travail de l'élève 3, en exploitant le coefficient directeur de (*AB*).
Il trouve comme coefficient directeur de la droite (*AB*) la fraction $\dfrac{21}{77}$ qu'il simplifie en la fraction irréductible $\dfrac{3}{11}$.
Faire expliciter qu'on peut planter un oranger en tout point *M* dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ telles que :
- x et y sont deux entiers.
- $10 < x < 87$
- Les fractions : $\dfrac{y-10}{x-10}$ et $\dfrac{21}{77}$ sont deux fractions équivalentes.

La fraction irréductible équivalente à $\dfrac{21}{77}$ étant $\dfrac{3}{11}$, les fractions équivalentes à $\dfrac{21}{77}$ sont les fractions de la forme $\dfrac{3k}{11k}$ où k est un entier non nul. On obtient : $x = 10 + 11k$; $y = 10 + 3k$ et il reste à déterminer quels sont les entiers k tels que $10 < 10 + 11k < 87$. On trouve six entiers, et six points où l'on peut planter un oranger.

Terminer par une figure où figurent les six points solution.



On peut aussi suivre plus étroitement l'idée de l'élève 3 et de son changement de repère.

Faire expliciter dans ce cas qu'on peut planter un oranger en tout point M dont les nouvelles coordonnées vérifient :

- X est un entier tel que $0 < X < 77$
- $Y = \frac{3X}{11}$ est lui aussi un nombre entier (conformément à la caractérisation donnée par l'élève).

11 étant un nombre premier, $Y = \frac{3X}{11}$ est un entier si et seulement si X est un multiple de 11.

Il y a six multiples de 11 situés strictement entre 0 et 77. On pourra planter six orangers, aux points de nouvelles coordonnées $(11k\ ;\ 3k)$ où $k = 1\ ;\ 2\ ;...;6$.

3.Voir REDCM pages 82 et 83.

3. Commentaires

1. La question 1 posée par le jury est bien représentative de l'hypocrisie qu'il y a à prétendre extraire de productions d'élèves qui tiennent en une ligne et demie des « compétences acquises », notion ici allègrement galvaudée. Cette question aurait gagné en pertinence si on disposait des productions complètes des élèves, portant sur les réponses aux deux questions du problème. C'est bien la réponse à la deuxième question qui nécessite un certain esprit d'initiative et un engagement de compétences.

2. On peut mettre en cause le parachutage quelque peu surréaliste du « repère orthonormé » utilisé. Pourquoi ce choix de coordonnées pour les points A et B ? Il aurait été intéressant de proposer par exemple un plan du terrain, en discutant avec les élèves du choix d'un repère.