ESD 2013 – 09 : Matrices

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Dans une réaction chimique impliquant deux composés A et B, on sait qu'à chaque minute, 60 % du composé A ne réagit pas, le reste se transformant en B, tandis que seul 30 % du composé B se transforme en A. Aucun autre composé n'est produit lors de la réaction. On considère deux suites de nombres réels (u_n) et (v_n) donnant les quantités en grammes des composés n minutes après le début de la réaction, la masse totale des deux composés étant de 900 grammes.

1. Dans cette question seulement, on suppose qu'on dispose au départ de 450 grammes de composé A.

1.1. À l'aide d'un tableur, préparer sur une feuille de calcul trois colonnes intitulées respectivement n, (u_n) et (v_n).

1.2. Entrer en deuxième ligne les valeurs initiales de n, (u_n) et (v_n).

1.3. Compléter les cellules de la troisième ligne pour pouvoir, par recopie, simuler l'évolution des suites (u_n) et (v_n) en fonction de n.

1.4. En déduire u_{20} et v_{20}.

2. Après 3 minutes d'expérience, un dosage fait apparaitre que la masse du composé A est en fait de 378 grammes. En procédant par essais et erreurs, retrouver les masses initiales de chaque composé en début de réaction.

B. Un extrait du manuel Odyssée TS (Hatier 2012)

Dans une réaction chimique impliquant deux composés A et B, on sait qu'à chaque minute, 60 % du composé A ne réagit pas, le reste se transformant en B, tandis que seul 30 % du composé B se transforme en A. Aucun autre composé n'est produit lors de la réaction. On considère deux suites de nombres réels (u_n) et (v_n) donnant les proportions des composés n minutes après le début de la réaction (n entier positif).

On note P_n la matrice colonne égale à $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que $P_{n+1} = MP_n$, où M est une matrice carrée d'ordre 2 que l'on explicitera. En déduire que $P_n = M^n P_0$.*
2. a) *Montrer que la matrice M est inversible, donner son inverse M^{-1}.*

   b) *Après 3 minutes d'expérience, un dosage fait apparaitre que la proportion de composé A est 42 %.*
   Retrouver les proportions initiales de chaque composé en début de réaction.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Comparez les compétences mobilisées par chacune des deux méthodes.

2. Exposez une correction de la question 2 du manuel comme vous le feriez avec une classe de terminale scientifique.

3. Proposez deux ou trois exercices sur le thème « **Matrices** ».

2. Eléments de correction

L'exercice propose l'étude d'un système dynamique à deux états. Cet exercice est conforme aux objectifs de la rubrique « Matrices et suites » du programme de terminale S Spécialité Mathématiques. Comme l'indique un document d'accompagnement de ces programmes, il s'agit dans cette rubrique de « *commencer par des résolutions de problèmes motivant une introduction des matrices et non par une introduction ex nihilo de ces dernières et encore moins de l'algèbre linéaire* ». C'est pourquoi deux versions sont proposées.
Les deux versions de l'exercice correspondent en effet à deux moments différents de l'apprentissage. La version « professeur » permet une approche expérimentale de la situation susceptible de « *motiver une introduction des matrices* ». La version « manuel », quant à elle, met en valeur l'apport du calcul matriciel dans le traitement de genre de problème.

1. Compétences développées par les deux versions

L'exercice professeur :
L'exercice professeur est plutôt axé sur la prise en main d'un outil logiciel permettant de décrire l'évolution du système dynamique étudié. La première question illustre l'emploi de la poignée « recopier vers le bas » pour itérer une formule. La deuxième question vise à étudier l'impact sur les calculs du contenu d'une cellule de référence (où est consigné un paramètre déterminant).

- Utiliser, comprendre, élaborer une simulation numérique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel (question 1).
- Observer, expérimenter en utilisant éventuellement des outils logiciels (question 2).

L'exercice manuel :
L'exercice manuel est axé sur l'utilisation de l'outil des matrices, plus particulièrement des opérations sur les matrices (puissance, matrice inverse), pour résoudre ce genre de problème.

- Traduire en langage mathématique une situation réelle.
- Exercer l'intelligence du calcul : organiser les différentes étapes d'un calcul complexe.

2. Correction de la question 2.

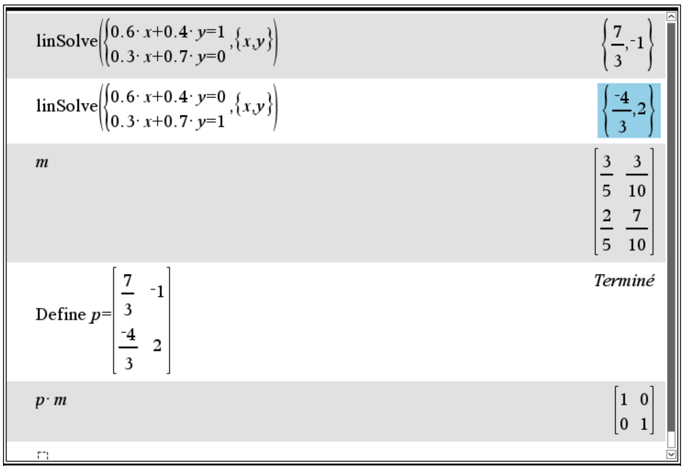
Rappeler la définition de l'inversibilité d'une matrice. On dit qu'une matrice M carrée 2×2 est une matrice inversible s'il existe une matrice M' carrée 2×2 vérifiant la double égalité : $M'\times M = M \times M' = I_2$.

L'affichage de la matrice M^{-1} peut être obtenu directement par une calculatrice.
Expliciter le rôle de cette matrice dans le contexte étudié : La relation entre les termes de deux rangs consécutifs $\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} =_{\text{gilbertjulia 2014}} M \times \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$ est équivalente à : $\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = M^{-1} \times \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix}$. Si l'action de matrice M sur un état donné permet de connaître l'état suivant, inversement l'action de la matrice M^{-1} permet de connaître l'état précédent.

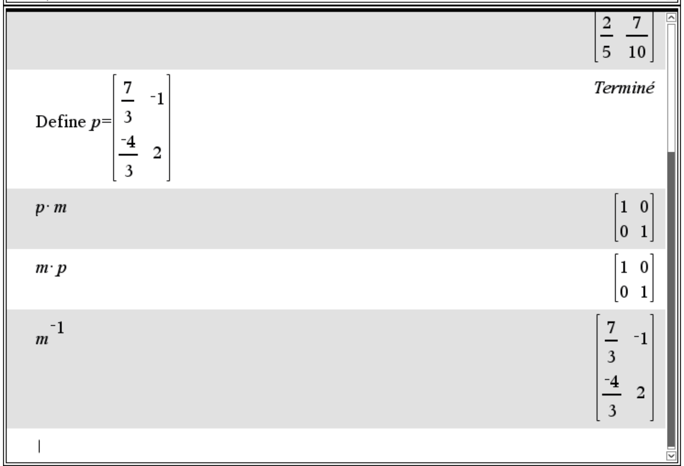
Si les élèves ont rarement inversé une matrice, on peut développer une méthode de recherche de cette matrice « à la main » :
Chercher M' tel que : $M'\times M = I_2$ revient à chercher à résoudre un système de quatre équations à quatre inconnues : $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ce système revient en réalité à résoudre deux systèmes d'équations à deux inconnues : $\begin{cases}0{,}6\,x+0{,}4\,y=1\\0{,}3\,x+0{,}7\,y=0\end{cases}$ $_{gj2014}$ et $\begin{cases}0{,}6\,z+0{,}4\,t=0\\0{,}3\,z+0{,}7\,t=1\end{cases}$. On remarque que d'un système à l'autre, seul le second membre a changé.

La résolution de ces systèmes peut être confiée à un solveur.

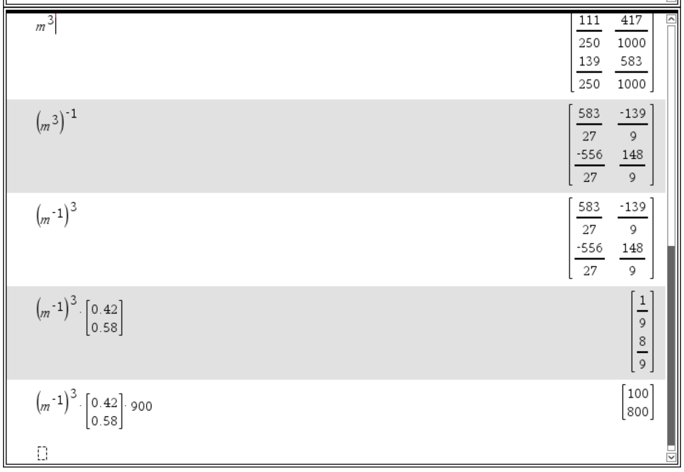


Faire remarquer que $M\times M'=M'\times M=I_2$ et comparer avec l'affichage de la matrice M^{-1}



L'état au bout de 3 minutes d'expérience s'obtient à partir de l'état initial par la relation : $\begin{bmatrix}u_3\\v_3\end{bmatrix}=M^3\times\begin{bmatrix}u_0\\v_0\end{bmatrix}$. Inversement, l'état initial est lié à l'état au bout de trois minutes par la relation : $\left(M^3\right)^{-1}\times\begin{bmatrix}u_3\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_0\\v_0\end{bmatrix}$.

La proportion initiale de composé A dans le mélange est 1/9. Il y a donc 100 g de composé A et 800 g de composé B au début de l'expérience.



On peut faire apparaître pourquoi $\left(M^3\right)^{-1}=\left(M^{-1}\right)^3$.

- L'action de M^3 permet d'obtenir en une seule opération l'état 3 minutes après. Son inverse permet d'obtenir en une seule opération l'état 3 minutes avant.
- L'action de M^{-1} donne l'état une minute avant. Son cube revient à faire agir cette matrice trois fois, on obtient aussi l'état 3 minutes avant.

3. Conclusion

Bilan de la version professeur

L'affichage des nombres a été fixé volontairement à « flottant 12 », ce qui n'est pas nécessaire en pratique, pour montrer qu'au rang 20, il y a déjà belle lurette que le système s'est stabilisé.
Il y aurait intérêt à essayer quelques valeurs initiales et à étudier leur influence sur les différentes lignes.
Si l'impact est important sur les deux ou trois premières lignes, on constate que cet impact diminue rapidement dans les lignes suivantes et que le système se stabilise toujours vers les mêmes valeurs, indépendamment des valeurs initiales choisies.

	A num	B un	C vn	D	E	F
=						
10	10	385.71555105	514.28444895			
11	11	385.714665315	514.285334685			
12	12	385.714399595	514.285600406			
13	13	385.714319878	514.285680122			
14	14	385.714295964	514.285704037			
15	15	385.714288789	514.285711211			
16	16	385.714286637	514.285713363			
17	17	385.714285991	514.285714009			
18	18	385.714285797	514.285714203			
19	19	385.714285739	514.285714261			
20	20	385.714285722	514.285714278			
21	21	385.714285717	514.285714283			

B20 $=0.6\cdot b19+0.3\cdot c19$

L'affichage des nombres a maintenant été ramené à « Flottant 4 ».

Dans la question 2, au bout de quelques essais, les élèves devraient aboutir à l'écran suivant.

(On remarque dans ce cas également qu'à partir de la ligne 7, plus rien ne semble bouger).

	A num	B un	C vn	D	E	F
=						
1	0	100	800			
2	1	300.	600.			
3	2	360.	540.			
4	3	378.	522.			
5	4	383.4	516.6			
6	5	385.	515.			
7	6	385.5	514.5			
8	7	385.7	514.3			
9	8	385.7	514.3			
10	9	385.7	514.3			
11	10	385.7	514.3			
12	11	385.7	514.3			

B4 $=0.6\cdot b3+0.3\cdot c3$

Bilan de la version manuel

L'apport du calcul matriciel :

- En une seule opération, on peut obtenir l'état à un instant donné par la formule $P_n = M^n \times P_0$
- En une seule opération, on peut obtenir l'état initial à partir de l'état à l'instant n par la formule $P_0 =_{gjulia2014} \left(M^{-1}\right)^n \times P_n$

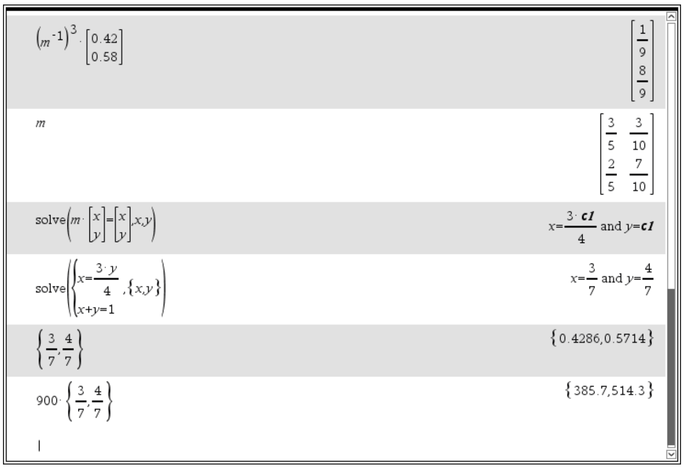
Les deux versions de l'exercice apparaissent complémentaires, la version professeur amenant une approche expérimentale, la version manuel amenant un traitement mathématique.

4. Pour aller (un peu) plus loin

On peut combiner les deux versions pour aborder le problème du devenir « à long terme » de cette réaction chimique.

La « version professeur » donne l'occasion à plusieurs reprises de constater qu'au bout d'un certain temps, il n'y a plus de changement significatif dans les proportions des deux composés. Comment expliquer cette stabilisation, qui semble indépendante des proportions initiales ?

Le calcul matriciel utilisé dans la version manuel peut maintenant être combiné au calcul formel. La stabilisation du système devrait amener à chercher s'il existe des matrices colonnes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ laissées invariantes par l'action de M. Le solveur indique qu'il s'agit des matrices colonnes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ telles que $x=\dfrac{3y}{4}$ *gjulia* 2014 . On fait afficher les matrices colonnes de somme 1 (proportions) et de somme 900 (quantités) de manière à les comparer aux résultats empiriques obtenus dans le tableau « version professeur ».



On obtient un premier résultat : s'il y a stabilisation, c'est vers un état $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ laissé invariant par l'action de M.

Il reste au lecteur à expliquer pourquoi il y a une stabilisation effective vers ces valeurs …