ESD 2013 – 07 : Optimisation

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

À partir de l'extrait de manuel donné ci-dessous, un professeur a proposé l'exercice suivant à ses élèves.

1. Construire à l'aide d'un logiciel un triangle ABC de hauteur $[AH]$, où H est sur le segment $[BC]$, tel que $AH = 4$, $CH = 3$ et $BH = 4$.

2.1. Placer un point M sur le segment $[AC]$, et afficher la longueur BM.
2.2. Chercher pour quelle position du point M la distance BM est minimale. Quelle est alors la nature du triangle ABM ? Pouvait-on le prévoir ?

3. Déterminer la valeur exacte de la distance AM lorsque BM est minimale.

B. D'après le manuel Symbole seconde (Belin 2010)

On se place dans un triangle ABC. On désigne par H le pied de la hauteur issue de A, et on suppose que $AH =$ 4 cm, $CH = 3$ cm et $BH = 4$ cm. Par un point M du segment $[AC]$, on fait passer une droite parallèle à (AH) qui coupe (CH) en N. On désigne par x la longueur du segment $[AM]$ (en centimètres).
1.1. Calculer la longueur AC.
1.2. Quelles sont les valeurs possibles de la variable x ?
1.3. Exprimer la longueur CM en fonction de x.

2.1. Démontrer, grâce au théorème de Thalès, que $MN = 4 - \frac{4}{5}x$

2.2. Démontrer, grâce au théorème de Thalès, que $CN = 3 - \frac{3}{5}x$

3. En utilisant le théorème de Pythagore, démontrer que : $MB^2 = x^2 - \frac{8}{5}x + 32$

4. À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, déterminer les valeurs de MB^2 lorsque x varie de 0 à 5 de 0,1 en 0,1. Quelle semble être la valeur de x qui rend la quantité MB^2 minimale ?

5. Démontrer, en la développant, l'expression suivante : $MB^2 = \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{784}{25}$

6. On pose, pour $x \in [0\ ;\ 5]$: $f(x) = \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{784}{25}$.
6.1. Déterminer le tableau de variation de f.
6.2. En quelle valeur de x la fonction f atteint-elle son minimum? Que vaut ce minimum ?
6.3. En déduire la valeur exacte de la distance AM lorsque BM est minimale.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Comparez les compétences mobilisées dans chacune des deux versions de l'exercice.

2. Exposez une correction de la question 6 de l'exercice du manuel tel que vous le feriez devant une classe de seconde.

3. Proposez deux ou trois exercices sur le thème « **optimisation** ».

2. Eléments de correction

On relève dans la colonne « capacités » des programmes de la classe de Quatrième : « *Savoir que le point d'une droite le plus proche d'un point donné est le pied de la perpendiculaire menée du point à la droite* ». Cette capacité est à ce niveau de classe non exigible mais cependant proposée.

Voici cette notion de point d'une droite le plus proche d'un point donné revisitée avec de nouveaux outils au niveau seconde. Il s'agit de chercher le point du côté (BC) d'un triangle ABC le plus proche du sommet A. Compte tenu des données de l'exercice, le triangle ABC est un triangle acutangle. De ce fait, le pied de la hauteur issue de A est un point du segment [BC].

1. Compétences mobilisées[1].

L'exercice « professeur » est composé de deux parties : les deux premières questions traitent un problème d'optimisation, la question 3 un calcul de longueurs.
L'intention de l'exercice professeur est d'amener les élèves à :

- Expérimenter en utilisant un outil logiciel (questions 1 et 2).
- Emettre une conjecture et savoir argumenter pour confirmer cette conjecture (question 2).
- Etre capable d'élaborer et de conduire une démonstration à plusieurs pas (question 3).

Une résolution de la question 3 est par exemple la suivante :
Soit H le pied de la hauteur issue de A. Les triangles AHB et AHC sont tous deux rectangles en H. En appliquant le théorème de Pythagore dans chacun de ces deux triangles :

$$BH^2 + AH^2 = AB^2 = 32$$

$$BH^2 + CH^2 = BH^2 + (AC - AH)^2 = BH^2 + 25 - 10\,AH + AH^2 = 49$$

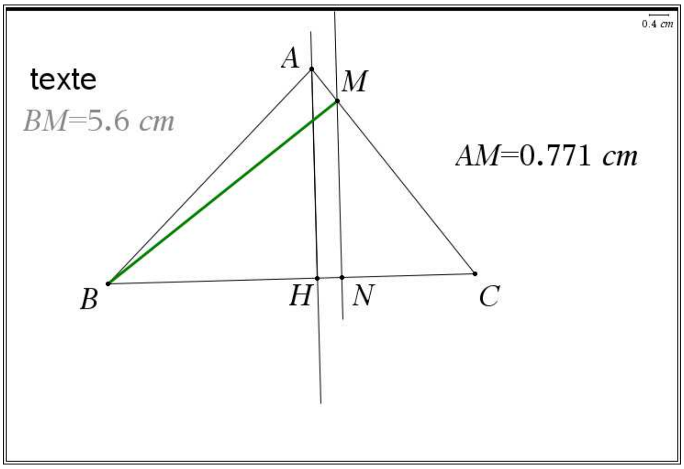
On a donc obtenu : $\begin{cases} BH^2 + AH^2 = 32 \\ BH^2 + AH^2 - 10\,AH = 24 \end{cases}$ $_{gilbertjulia2014}$ d'où on déduit : $AH = 0{,}8$

L'intention de l'exercice « manuel » est d'amener les élèves à :

- Modéliser une situation géométrique à l'aide d'une fonction (principalement).
- Passer du cadre géométrique au cadre numérique adapté pour traiter un problème.
- Exercer l'intelligence du calcul : en organiser les différentes étapes, choisir des transformations, effectuer des simplifications. (L'énoncé se substitue cependant très largement à l'élève, on ne peut pas dire que cette compétence soit vraiment « mobilisée »).

[1] Ce sujet est un véritable cas d'école illustrant l'ambiguïté de cette question de « compétences », posée ici de façon embarrassante. Compte tenu du guidage de l'énoncé dans sa version manuel, où l'élève est pris par la main et conduit pas à pas, il n'y a pas de « compétence » particulière à mettre en œuvre dans cette version mais seulement des savoirs ou savoir faire, permettant chacun d'avancer d'un pas. L'élève doit par exemple savoir utiliser le théorème de Thalès puis celui de Pythagore (on lui dit de le faire …). Il doit ensuite savoir développer un carré et réarranger une expression littérale. Enfin, il doit connaître et savoir utiliser en situation les propriétés d'une fonction carrée.
C'est seulement en effectuant une synthèse de cette version de l'exercice, sous la direction de l'enseignant, que l'élève pourra peut-être, en coordonnant les différents savoirs et savoir faire, acquérir une « compétence » (voir REDCM page 13 à propos de la théorie des « petites marches »).
La version professeur est ici plus facile à cibler de ce point de vue.

Le choix « $AH = 4$, $CH = 3$ et $BH = 4$ » facilite le calcul de AC (le triangle CHA est un triangle rectangle « 3-4-5 »).



[BM] est l'hypoténuse du triangle rectangle BNM. Pour calculer la longueur de ce segment, il faut commencer par calculer MN et BN.

Le triangle CNM est une réduction du triangle CHA de rapport $\frac{CM}{CA} = \frac{5-x}{5}$.

Sans indication d'énoncé, le calcul de BM amène à celui de BN et MN qui amène à celui de CN et de CM.
On comparera avec l'ordre dans lequel ces longueurs sont calculées en suivant l'énoncé.

2. On soulignera l'intérêt de l'écriture $MB^2 = \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{784}{25}$ (on pourra montrer comment cette expression a été construite, à partir du « début de carré $x^2 - \frac{8}{5}x$ »)

3. Voir REDCM pages 57 puis 146 à 149.

3. Conclusion

L'objectif de l'exercice « manuel » est de *mettre en place une méthode* qui pourra par la suite servir de référence. L'élève y est censé apprendre comment modéliser puis traiter une situation à l'aide d'une fonction. Toutes les étapes de cette démarche sont explicitement présentes au fil de l'énoncé :

- Le choix d'une variable x (explicité dans l'énoncé lui-même, la longueur AM).
- L'intervalle d'étude (1.2).
- Le calcul des grandeurs utiles (1.3 à 2.2) permettant de construire la fonction objectif MB^2 (3).
- Le traitement mathématique (5 à 6.2) où l'on apprend à étudier les variations d'une fonction trinôme.
- La conclusion (6.3)

L'exercice « manuel » choisit d'autre part le prétexte de ce problème d'optimisation pour entraîner les élèves à des techniques de calcul propres à l'étude d'une fonction trinôme (mise sous forme canonique et application).

Pour atteindre ces deux objectifs, il appartient à l'enseignant, après la correction proprement dite, de conduire une synthèse à propos de « qu'est-ce qu'on a fait dans cet exercice », de revenir sur le but de l'exercice (minimiser MB^2) et sur la démarche qui a permis d'aboutir (souligner les différentes étapes).
Une autre synthèse, plus technique, comparera l'efficacité dans le traitement du problème de chacune des expressions $MB^2 = x^2 - \frac{8}{5}x + 32$ et $MB^2 = \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{784}{25}$ et montrera pourquoi la deuxième expression est, dans ces circonstances, davantage « parlante ».

Deux critiques apparaissent :

- L'objectif de l'activité n'est pas explicitement mentionné avant la question 4. Il n'y a aucun fil conducteur dans cet énoncé, on avance sans savoir où l'on va.
- Le problème d'optimisation abordé est un problème élémentaire qui peut être résolu très simplement en raisonnant géométriquement. Est-il utile de sortir une artillerie aussi lourde à cette occasion ?

Pour mettre en évidence les qualités d'une nouvelle démarche, encore faut-il que celle-ci se montre opportune, performante et compétitive. Est-ce bien le cas ? On est en droit de faire preuve d'un certain scepticisme devant une telle usine à gaz …

Le « professeur fictif » auquel le jury a fait appel a donc de solides raisons d'avoir construit un nouvel énoncé. Son intention, très différente de celle de l'exercice « manuel », est clairement d'amener les élèves à se familiariser avec l'usage d'un logiciel de géométrie dans une situation très simple, à construire puis exploiter une figure dynamique. Il vise à promouvoir une forme de démarche scientifique : « Expérimentation, conjecture, démonstration » qui devra être reprise ultérieurement dans des situations plus périlleuses. La question 3 amène ensuite à mettre en place un raisonnement complexe.

Voici une proposition pour améliorer la façon d'amener une étude de fonctions trinômes comme le souhaite l'énoncé « manuel » et qui pourrait davantage capter l'attention des élèves (?) :

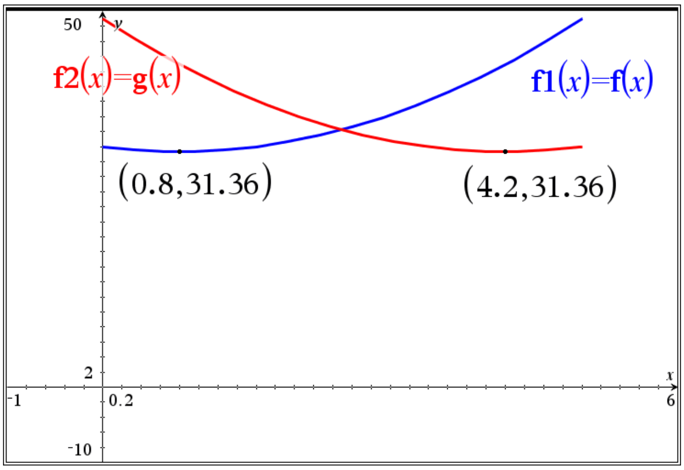
- Proposer l'exercice « professeur » sans la troisième question. On conclut que BM et son carré BM^2 varient lorsqu'on fait varier la position de M sur $[AC]$ et que le point M tel que MB est minimum est le pied H de la hauteur issue de A.
- Peut-on exprimer BM et son carré BM^2 en fonction de l'une ou de l'autre des distances AM ou CM choisie comme variable ?
- MB^2 est une fonction trinôme de la variable choisie. Comment étudier les variations de cette fonction et déterminer son minimum ?

Si on pose $AM = x$, on arrive à l'expression : $MB^2 = f(x) = x^2 - \frac{8}{5}x + 32$

Si on pose $CM = x$, on arrive à l'expression : $MB^2 = g(x) = x^2 - \frac{42}{5}x + 49$

La question 5 de l'exercice « manuel » suggère une autre écriture de la fonction trinôme $f(x)$ efficace pour obtenir les variations de f et son minimum.

Pour fixer cette méthode d'étude de variations, on peut proposer aux élèves d'étudier « de la même manière » les variations de g, éventuellement de la représenter graphiquement (plutôt dans un nouveau repère, puisque la variable ne représente pas la même chose).



En conclusion, on remarque la concordance des résultats : Le point réalisant le minimum est le point du segment $[BC]$ situé à 0,8 cm de A et à 4,2 cm de C.

Dans ce cas : $AM^2 + BM^2 = 0{,}64 + 31{,}36 = 32 = AB^2$ et $CM^2 + BM^2 = 17{,}64 + 31{,}36 = 32 = CB^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, les triangles AMB et CMB sont des triangles rectangles et le point M en question est le pied de la hauteur issue de A.