ESD 2013 – 05 : Arithmétique

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Pour tout entier relatif *n*, on considère les entiers *a* et *b* suivants : $a = n^3 - 2n + 5$ et $b = n + 1$

1. Démontrer que $PGCD(a\ ;\ b) = PGCD(b\ ;\ 6)$
2. Déterminer les valeurs de *n* telles que $PGCD(a\ ;\ b) = 3$
3. Déterminer les valeurs de *n* pour lesquelles *b* divise *a*.

B. Les solutions proposées par quatre élèves de terminale scientifique

Élève 1
Question 2. $PGCD(b\ ;\ 6) = 3$ donc *b* est un multiple de 3 et $n = 3k + 2$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

Élève 2
Question 2. $PGCD(b\ ;\ 6) = 3$ donc $b = 3(2k+1)$, soit $n = 6k + 2$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

Élève 3

Question 3. J'ai rentré sur le tableur les valeurs de *n* de 0 à 100, puis les formules de *a* et *b* et $\frac{a}{b}$. Les seules valeurs pour lesquelles on a un entier sont $n = 0$; $n = 2$; $n = 5$.

Élève 4
Question 3. Ma calculatrice formelle me donne que $a = (n^2 - n - 1)b + 6$. Le reste de la division n'est jamais nul, donc *b* ne divise jamais *a*.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions de ces élèves, en mettant en évidence les compétences acquises dans le domaine de l'arithmétique.

2. Exposez une résolution de la question 3 de cet exercice comme vous le feriez devant une classe de terminale scientifique.

3. Présentez deux ou trois exercices sur le thème arithmétique dont l'un au moins amène à formuler une conjecture.

2. Eléments de correction

Cet exercice propose une étude de la suite des PGCD de deux nombres indexés. Il peut être posé à une classe de terminale scientifique spécialité mathématiques après l'étude du théorème de Gauss.

La résolution de la question 1 repose sur une propriété du *PGCD* : Etant donnés deux entiers relatifs *a* et *b*, pour tout entier relatif *k* : $PGCD(a + k\,b,\ b) = PGCD(a, b)$[1]

[1] Si *d* divise *a* et *b*, alors il divise *b* et $a + k\,b_{gjulia\,2014}$. En effet, il existe deux entiers relatifs *u* et *v* : $a = u\,d$; $b = v\,d$ et par conséquent : $a + k\,b = (u + k\,v)d$. L'entier *d* est aussi diviseur de $a + k\,b$
Si *d* divise $a + k\,b$ et *b*, alors il divise *a* et *b*. En effet, il existe deux entiers relatifs *u* et *v* : $a + k\,b = u\,d$; $b = v\,d$ et par conséquent : $a = (u - k\,v)d$. L'entier *d* est aussi diviseur de *b*. Les entiers *a* et *b* d'une part, $a + k\,b$ et *b* d'autre part, ont les mêmes diviseurs et, en particulier, le même *PGCD*.

Une expression de a en fonction de b est en effet : $a=(b-1)^3-2(b-1)+5$ $=b^3-3b^2+b+6=b\left(b^2-3b+1\right)+6$

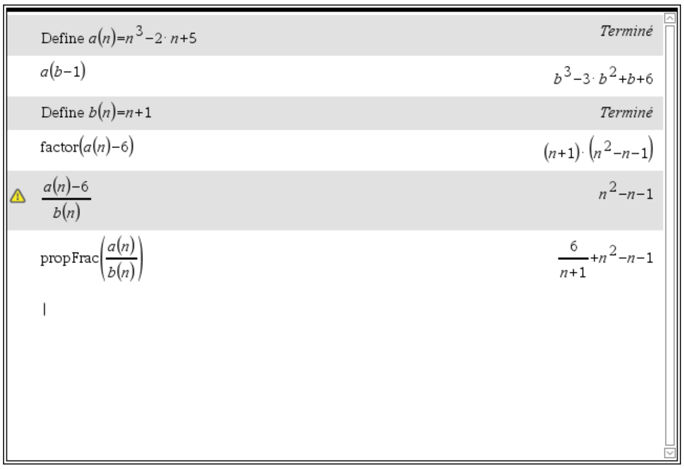
En appliquant cette propriété du PGCD : $PGCD(a,b)=PGCD\left(a-b\left(b^2-3b+1\right),b\right)=PGCD(6,b)$

1. Analyse des productions d'élèves.

Les élèves 1 et 2 ont répondu à la question 2 de l'exercice.
L'élève 2 donne une réponse correcte. Il interprète directement la condition $PGCD(b\ ;\ 6)=3$ par « b est un multiple impair de 3 ». Il montre ainsi implicitement qu'il a acquis la caractérisation du PGCD « d est le PGCD de a et de b si et seulement si il existe deux entiers a' et b' premiers entre eux tels que : $a=d\,a'$; $b=d\,b'$ ».
Il sait opérer la conversion entre le langage naturel « b est un multiple impair de 3 » et le langage symbolique « $b=3(2k+1)$ avec $k\in\mathbf{Z}$ ».
L'élève 1 donne une réponse incorrecte. Il n'utilise qu'une condition nécessaire : « si d est le PGCD de a et de b, alors a et b sont des multiples de d ». Comme l'élève 1, il sait cependant opérer la conversion entre le langage naturel « b est un multiple de 3 » et le langage symbolique « $b=3k+3$ (probablement) avec $k\in\mathbf{Z}$ ».

Les élèves 3 et 4 ont répondu à la question 3 de l'exercice et ont suivi des démarches différentes. Aucun des eux n'a donné de réponse correcte.
L'élève 3 a su « expérimenter en utilisant un outil logiciel » et pour cela « élaborer une simulation numérique ». Il s'en est tenu cependant au stade du constat et n'a pas su « conduire une démonstration, confirmer une conjecture ». De plus, il n'a tabulé que des valeurs de n positives. De ce fait, les solutions négatives lui ont échappé, de même que la valeur 1 (celle-ci sans qu'on puisse expliquer pourquoi, il n'a probablement pas contrôlé ses résultats).

L'élève 4 cherche à obtenir une décomposition de a de la forme $a=b\,q+6$. On peut penser qu'à l'aide de sa calculatrice il a cherché à factoriser d'une façon ou d'une autre l'expression $a-6$ (sachant exploiter en cela les résultats de la question 2).
Il a su « exercer l'intelligence du calcul, choisir des transformations ».
Sa démarche échoue car il n'utilise pas la spécificité de la division euclidienne : r est le reste de la division euclidienne de a par b si et seulement si il existe un entier relatif q tel que : $\begin{cases} a=b\,q+r \\ 0\le r<b \end{cases}$



2. Une correction de la question 3 peut s'appuyer :

- D'une part sur le résultat de la question 1 : $PGCD(a\ ;\ b)=PGCD(b\ ;\ 6)$ ce qui implique que $PGCD(a\ ;\ b)$ est un diviseur de 6.
- D'autre part sur une des caractérisations de la divisibilité d'un entier par un autre non nul : soit b un entier non nul, l'entier b divise a si et seulement si $PGCD(a\ ;\ b)=|b|$.

Ainsi, b entier non nul divise a si et seulement si $|b|$ est un diviseur de 6. Il reste à faire l'inventaire des valeurs de b possibles :

- Ou bien $|b| = 6$ ce qui est le cas si $n = 5$ ou si $n = -7$
- Ou bien $|b| = 3$ ce qui est le cas si $n = 2$ ou si $n = -4$
- Ou bien $|b| = 2$ ce qui est le cas si $n = 1$ ou si $n = -3$
- Ou bien $|b| = 1$ ce qui est le cas si $n = 0$ ou si $n = -2$

	A	B num	C aa	D bb	E pgcd	F div	G	H
=		=seq(n,…	=num^3−2*nu…	=num+1	=gcd(aa,bb)	=mod(aa,…	=aa/bb	
33		-8.	-491.	-7.	1.	6.	70.1429	
34		-7.	-324.	-6.	6.	0.	54.	
35		-6.	-199.	-5.	1.	1.	39.8	
36		-5.	-110.	-4.	2.	2.	27.5	
37		-4.	-51.	-3.	3.	0.	17.	
38		-3.	-16.	-2.	2.	0.	8.	
39		-2.	1.	-1.	1.	0.	-1.	
40		-1.	6.	0.	6.	6.	#UNDEF…	
41		0.	5.	1.	1.	0.	5.	
42		1.	4.	2.	2.	0.	2.	
43		2.	9.	3.	3.	0.	3.	
44		3.	26.	4.	2.	2.	6.5	

F34 =0.

.

	A	B num	C aa	D bb	E pgcd	F div	G	H
=		=seq(n,…	=num^3−2*nu…	=num+1	=gcd(aa,bb)	=mod(aa,…	=aa/bb	
39		-2.	1.	-1.	1.	0.	-1.	
40		-1.	6.	0.	6.	6.	#UNDEF…	
41		0.	5.	1.	1.	0.	5.	
42		1.	4.	2.	2.	0.	2.	
43		2.	9.	3.	3.	0.	3.	
44		3.	26.	4.	2.	2.	6.5	
45		4.	61.	5.	1.	1.	12.2	
46		5.	120.	6.	6.	0.	20.	
47		6.	209.	7.	1.	6.	29.8571	
48		7.	334.	8.	2.	6.	41.75	
49		8.	501.	9.	3.	6.	55.6667	
50		9.	716.	10.	2.	6.	71.6	

F34 =0.

L'ensemble des valeurs de n qui sont solutions de la question est donc l'ensemble $\{-7\,;-4\,;-3\,;-2\,;0\,;1\,;2\,;5\}$.

On retrouve ces solutions sur les deux écrans ci-contre.

L'utilisation du tableur semble être dans chacune des deux questions 2 et 3 plus pertinente *après* une recherche individuelle des élèves et la communication de leurs conclusions, pour valider ou invalider leurs résultats et éventuellement relancer la recherche.

La colonne « pgcd » du tableur pourrait par exemple être exploitée pour mettre en cause la conclusion de l'élève 1 (« comment se fait-il que le tableur trouve moins de solutions que toi ? »). La conjecture « Il semble si on examine la colonne PGCD que chaque six entiers, on trouve une solution » est ensuite démontrée.

Les deux dernières colonnes peuvent être exploitées :

- Ou bien pour mettre en cause les conclusions des élèves 3 et 4. On peut par exemple reprendre le travail sur tableur de l'élève 4 (on devrait trouver alors les valeurs 0, 1, 2 et 5) puis attirer l'attention des élèves sur l'hypothèse « n entier relatif » et modifier le choix « J'ai rentré sur le tableur les valeurs de n de 0 à 100 » pour rentrer aussi des valeurs négatives. De nouvelles solutions devraient apparaître. Il reste à trouver une logique à la disposition dans Z de ces solutions, objectif que la correction de la question devrait atteindre.
- Ou bien après la correction telle qu'elle a été faite ci-dessus, à titre de vérification.

3. Voir REDCM pages 113 à 117