ESD 2013 – 01 : Algorithmique

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Une équipe de statisticiens propose les modèles suivants pour comparer l'évolution future de la population française et de la population allemande :

- On note u_n la population de l'Allemagne estimée en millions d'habitants au 1 janvier de l'année $2010+n$. On a alors : $u_0 = 81{,}2$ et $u_{n+1} = 0{,}998 \times u_n + 0{,}2$
- On note v_n la population de la France au 1 janvier de l'année $2010+n$. On a alors : $v_0 = 63{,}2$ et $v_{n+1} = 1{,}002 \times u_n + 0{,}1$

1. Ecrire un algorithme donnant l'année à partir de laquelle la différence entre la population de l'Allemagne et celle de la France sera inférieure à 15 millions et donner le résultat.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_n = -18{,}8 \times 0{,}998^n + 100$ et $v_n = 113{,}2 \times 1{,}002^n - 50$

3. Retrouver le résultat de la question 1.

B. Les réponses proposées par deux élèves à la question 1

Élève 1

Dans la calculatrice, mode suite, u_n en première colonne, v_n en 2ème colonne , $v_n - u_n$ en 3ème colonne , la différence est inférieure à 15 millions à partir de la 16ème année.

Élève 2

variables : *N et D*
début
  $18 \to D$;
  $0 \to N$;
  tant que $D > 15$ **faire**
    $0{,}004 \times D + 0{,}1 \to D$;
    $N + 1 \to N$;
  fin
  sorties : *Afficher D et N.*
fin

Mon algorithme ne marche pas car je trouve un an.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions de chaque élève en mettant en évidence ses compétences dans le domaine de l'algorithmique.

2. Exposez une correction des questions 2 et 3 comme vous le feriez devant une classe de terminale scientifique.

3. Présentez deux ou trois exercices faisant appel à des algorithmes.

2. Eléments de correction

Le sujet contextualise l'étude de deux suites arithmético-géométriques, satisfaisant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = a\,u_n + b$, l'une avec un coefficient a un peu plus grand que 1 et l'autre avec un coefficient a un peu plus petit que 1.

La compétence visée par l'exercice est « Mettre en œuvre un algorithme simple ».

L'exercice a un objectif restreint : orienter la recherche des élèves vers une utilisation de l'algorithmique, et faire conforter le constat algorithmique par une étude algébrique très guidée (les deux formules explicites sont données aux élèves). On peut regretter ce manque d'ambition.

1. Ci-contre, ce que l'élève 1 a pu obtenir. Il constate par simple lecture du tableau de valeurs qu'il a obtenu que $u_{15} - v_{15} > 15$ tandis que $u_{16} - v_{16} < 15$ $_{gj2014}$. Il donne un résultat correct à la première question.

	A	B un	C vn	D un_vn	E
=	=seq(n,n,0,254)	u,u,{0,255},{81.2},1)	=seqgen(1.002*	=un−vn	
8	7	81.4616	64.7943	16.6673	
9	8	81.4987	65.0239	16.4748	
10	9	81.5357	65.254	16.2817	
11	10	81.5726	65.4845	16.0881	
12	11	81.6095	65.7155	15.894	
13	12	81.6463	65.9469	15.6994	
14	13	81.683	66.1788	15.5042	
15	14	81.7196	66.4111	15.3085	
16	15	81.7562	66.644	15.1122	
17	16	81.7927	66.8772	14.9154	
18	17	81.8291	67.111	14.7181	

B **un**:=seqgen(0.998· u(n−1)+0.2,n,u,{0,255},{81.2},1)

Cet élève sait « effectuer un calcul automatisable à l'aide d'une calculatrice », plus précisément il sait générer sur sa calculatrice une suite définie par récurrence, effectuer des calculs élémentaires sur les suites, afficher et exploiter un tableau de valeurs.

Pour autant rien ne prouve sait « mettre en œuvre un algorithme », cet élève ne répond pas à la consigne qui attendait l'écriture explicite d'un algorithme comportant un test d'arrêt.

```
eleve2()
                1
            0.172
          Terminé
```

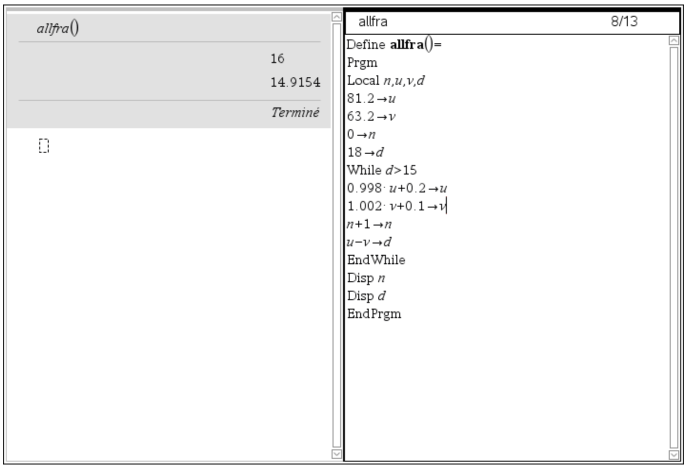
```
"eleve" enregistr. effectué
Define eleve()=
Prgm
Local n,d
0→n
18→d
While d>15
0.004· d+0.1→d
n+1→n
EndWhile
Disp n
Disp d
EndPrgm
```

L'élève 2 sait « mettre en œuvre un algorithme simple », en l'occurrence il propose un algorithme comportant une incrémentation et un test d'arrêt. Il sait mettre en cause son résultat sans pour autant déceler l'origine de l'aberration qu'il constate.

L'erreur de cette élève est due à un théorème en acte[1] implicitement admis par l'élève qui pourrait s'énoncer ainsi : « si deux suites satisfont les relations de récurrence R1 et R2, alors la suite différence satisfait la relation R1-R2 ».

[1] Voir REDCM page 108, note de bas de page

Un exemple d'algorithme demandé par l'exercice.



2. Dans le courant de la correction, on peut mettre en évidence le point suivant : l'exercice admet comme « allant de soi » que l'écart entre les deux populations diminue avec le temps et que lorsque cet écart devient plus petit que 15, il va le rester. Cette propriété n'est pas démontrée.

La lecture d'un tableau de valeurs permet certes de vérifier que le rang 16 est le premier rang pour lequel $d_n < 15_{gj2014}$ mais elle ne permet pas d'affirmer que cela va être définitivement le cas.

L'utilisation des formules explicites va justifier cela.

En effet, l'écart entre les populations des deux pays est : $d_n = u_n - v_n = 150 - 113{,}2 \times 1{,}002^n - 18{,}8 \times 0{,}998^n$.

De ce fait : $d_n - d_{n+1} = 0{,}2264 \times 1.002^n - 0.0376 \times 0.998^n$.

Le tableau montre que au rang zéro : $d_0 - d_1 = 0{,}1888$ et par ailleurs pour tout entier $n \geq 1$: $0{,}2264 \times 1.002^n - 0.0376 \times 0.998^n \geq 0{,}2264 - 0{,}0376 > 0$. La suite des écarts est donc une *suite strictement décroissante*. Dès lors que $d_{16} < 15$, pour tout entier $n \geq 16$ la même inégalité est définitivement vérifiée.

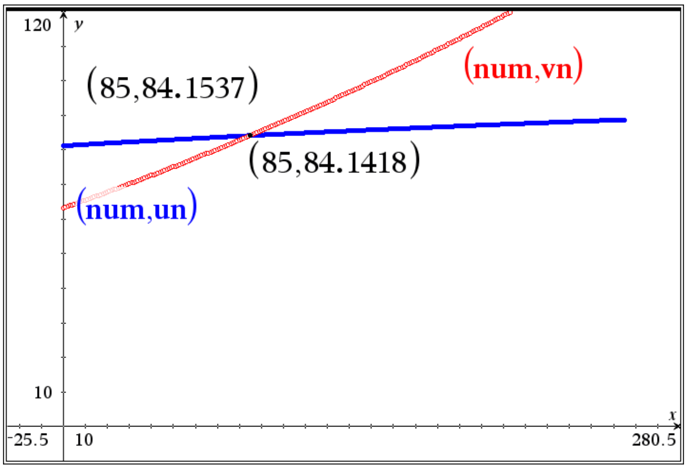
3. Pour aller plus loin

3.1. Le professeur peut d'abord commenter le choix des deux relations de récurrence modélisant de façon simplifiée l'évolution des populations d'une année sur l'autre.

Les coefficients 0,998 et 1,002 représentent des taux de variation naturelle des populations. En Allemagne il y a un peu plus de décès que de naissances dans la population installée, et le déficit naturel annuel est estimé à 0,2 %. En France, il y a un peu plus de naissances que de décès et le gain naturel annuel est estimé à 0,2 %. Les coefficients 0,2 et 0,1 représentent quant à eux les flux migratoires annuels, tous deux positifs.

3.2. Il y a un certain intérêt à faire comparer l'évolution à long terme des deux populations si l'on suppose que les deux modèles restent valides pendant une longue période.

Si les deux modèles restent valides, les deux populations devraient avoir à peu près le même nombre d'habitants au bout de 85 ans. Ensuite, la population française continuerait à croître tandis que la population allemande aurait tendance à se stabiliser.



Dans la relation explicite $u_n = -18{,}8 \times 0{,}998^n + 100$, on reconnaît l'expression d'une suite géométrique de raison *plus petite* que 1. Cette suite converge vers zéro, et la suite (u_n) converge vers 100.

Dans la relation explicite $v_n \underset{gj2014}{=} 113{,}2 \times 1{,}002^n - 50$, on reconnaît l'expression d'une suite géométrique de raison *plus grande* que 1. Cette suite diverge, et il en est de même de la suite (v_n).

Ainsi, les évolutions des populations des deux pays décrites par ces deux modèles seraient radicalement différentes, une population croissant indéfiniment et l'autre se stabilisant.

Pour conclure, on peut amener les élèves à réfléchir sur la validité des modèles proposés. Sur une courte période, on peut admettre que ces modèles donnent une représentation à peu près correcte de la réalité. Un horizon de 15 ans est « raisonnable » pour émettre une prévision.

En revanche, une projection trop lointaine n'est qu'une vue de l'esprit. Ainsi, affirmer que les deux populations vont être à peu près les mêmes au bout de 85 ans est illusoire. Il est hautement probable que les modèles devront être révisés d'ici là …